

LA GEOMETRIA
DEL
COMPASSO
DI
LORENZO MASCHERONI.



P A V I A anno V della Repubblica Francese.

*Presso gli Eredi di Pietro Galeazzi
(1797).*

A BONAPARTE L' ITALICO.

*Io pur ti vidi coll' invitta mano,
Che parte i regni, e a Vienna intinò pace,
Meco divider con attento guardo
Il curvo giro del fedel compasso.
E te pur vidi aprir le arcane cifre
D' ardui problemi col valor d' antico
Geometra Maestro, e mi sovvenne
Quando l' alpi varcasti Annibal novo
Per liberar tua cara Italia, e tutto
Rapidamente mi passò davanti
L' anno di tue vittorie, anno che splende
Nell' abisso de' secoli qual sole.
Segui l' impresa, e coll' invitta mano
Guida all' Italia tua liberi giorni.*

ERRORI

CORREZIONI

pag. 12 lin. 2	<i>A.</i>	<i>Af</i>
3	regiones	regione.
143 lin. 3	<i>B r d r</i>	<i>b c d r</i>
186 lin. 4	dodocadro	dodocadro
256 lin. 15	2249	2246
258 lin. 15	molta	molto
		<i>S</i>
260 lin. 3	<i>v 3</i>	<i>v 3</i>

Il 5. 129 è replicato due volte incontinentemente; ciò però non reca confusione.

PREFAZIONE

IL primo pensiero, che mi invitò a tentare le strade nuove di questa *Geometria del Compasso*, fu questo: mentre si trovano tante cose nuove progredendo nelle matematiche, non si potrebbe forse trovare qualche luogo ancora incognito retrocedendo? Finora le più semplici soluzioni della geometria sono state giudicate quelle, che altro non impiegano, che il compasso e la riga; ossia, ciò che è lo stesso, la retta, che è la più semplice tra le linee, e il cerchio, che è la più semplice fra le curve. A questi due stromenti, per così dire, de' problemi, che un tempo determinavano e costituivano la geometria elementare, furono aggiunte in progresso le curve coniche; quindi le superiori al secondo grado e le trascendenti di varie specie. Si sono continuate ad arricchire queste profonde indagini geometriche coi nuovi soccorsi dell'algebra sì finita, che infinitesima a tale, che ormai que' ri-

trovati, i quali dapprima parvero mirabilissimi agli antichi, e degni de' saggi di Talete e di Pitagora, sono l'arrampaggio dei fanciulli dei nostri giorni. Or dissi: non potresti tu ritrocce dagli elementi, come da una linea, demarcazione, e cercar qualche cosa di masta addietro a guisa di trascurata? egli vero che i problemi elementari d'Euclide sieno della più semplice costruzione? O non si potrebbe l'elemento matematico risolvere ne' suoi elementi fondamentali riga e compasso, a guisa di chi ha separata l'acqua in due arie, qualche aria pure stimata semplice, e due altre sostanze? A questo punto m'avvidi, che non potendosi far uso della riga sola se non per condurre una retta, si poteva però forse far uso del solo compasso non per descrivere solamente un cerchio, o un arco d'esso; ma descrivendone più con più centri, e con diverse aperture, trovare per via delle loro sezioni mutue più punti, che fossero utili, e appunto i cercati di posizione in qualche problema.

Fin qui conobbi, che questo era un ramo finora non coltivato per nulla dai matematici, e che soluzioni di simil genere ottenute per avventura col solo compasso sarebbero state per la loro costruzione più elementari di ogni altra. Ma due cose mi trattennero per poco di accingermi a tentar nulla per questa via. La prima fu il pensiero: qual prova verrà se tu arrivi a trovare col solo compasso que' punti, che altri hanno già finora trovati con esso e colla riga? La seconda era il timore, che da principio sembrarmi ben ragionevole, che anzi che avere vantaggio da miei tentativi, fossero pure coronati dall'esito; avrei avuto discapito. Le costruzioni col solo compasso per trovare i punti della geometria elementare sarebbero state complicate a più doppi sopra le già conosciute, nelle quali interviene la riga. Avrebbe dunque la teoria mancato d'eleganza, e la pratica di precisione. Sicchè io era al procinto d'abbandonare l'impresa.

Mentre io era così irresoluto, m'accadde di rileggere la maniera colla quale

Graham, e *Bird* dividevano in Inghilterra i loro grandi quadranti astronomici (*Encyclop. Method. Articl. quart de cercle mural*). Il quadrante di *Graham* fatto da lui per Greenwich non solo si dice aver servito di modello alla maggior parte di quelli che si sono fatti dopo; ma vien considerato ancora per la sua precisione dagli astronomi per uno de' migliori, che siansi mai adoperati nell'astronomia, fino all'epoca dei quadranti di *Ramsden*. Ora vidi che la divisione di quella celebre macchina, abbandonata affatto la riga, fu eseguita col solo compasso. E' interessante la descrizione del metodo impiegato in quella lunga ed ingegnosa operazione. Io non entrerò quì a dire le ragioni, per le quali la riga ne fu esclusa. Le indovineranno facilmente tutti quelli, che hanno perizia di simil genere di lavori. Per accennare in generale i vantaggi, che ha il compasso sopra la riga, qualora si tratti di una descrizione precisa di linee, che non debbano temere l'esame del microscopio, basta avvertire,

che trattandosi specialmente d'una riga alquanto lunga, è quasi impossibile ch'ella sia così dritta, che ne garantisca per tutto il suo tratto della posizione a luogo de' punti, che in essa sono. E' sia pur essa rettilissima. Sanno i pratici, che il dovere strisciare lungo essa colla punta che segna, porta seco una incertezza di parallelismo nel moto dell'asse di questa punta, o di perfetto adattamento allo spigolo, che rende spesso inutile la sua massima perfezione. A queste due difficoltà non va soggetto il compasso. Quando esso sia fermo nell'apertura, e finissimo nelle punte; centratane una immobilmente, il che non è difficile, l'altra scorrendo segna da se un'arco così preciso ed esatto, che nulla più.

Nel leggere quella descrizione avvertii, che *Graham* ebbe quattro incomodi. Il primo fu che dovette operare per via di tentativi. Prescindendo dall'arco di sessanta gradi che fu da lui determinato col raggio del cerchio; tutte le sue suddivisioni furono eseguite tentando. Gli antichi non hanno sommini-

strato mezzo di dividere la circonferenza di un cerchio col solo compasso, altro che in sei; questo viene esposto e dimostrato nella proposizione decimaquinta del libro quarto d'Euclide. Non potè dunque *Graham* ottenere precisione geometrica fuorchè in un punto.

Il secondo incomodo fu la perdita di tempo, che necessariamente si consuma anche dai più abili nei tentativi.

Il terzo fu l'aver dovuto impiegare due piani; uno, sul quale fare le prove; l'altro, sul quale trasportarne i risultati, che era lo stesso piano del quadrante. Ciò si fece da lui per non guastare colle prove sul quadrante la superficie del lembo.

Il quarto fu l'aver dovuto eseguire due divisioni di diverse specie. Siccome la divisione del quadrante in novanta gradi portava seco le suddivisioni di un arco in tre, e in cinque parti, e i tentativi di queste suddivisioni riuscivano imperfetti per la troppa accumulazione di errori; si volle da lui eseguire un'altra divisione del quadrante stesso accanto

alla prima, la quale non procedesse, che per via di bissezioni. Diviso dunque l'arco di sessanta gradi in due parti, ed avuto l'arco di trenta, e quindi il quadrante diviso in tre parti; colle suddivisioni per due si ebbe in seguito la sesta, quindi la duodecima parte ecc. fino a che tutto il quadrante restò diviso in parti novantasei. Essendo questa la divisione, che meritava più fiducia; l'altra divisione in novanta gradi, che era pur quella che doveva immediatamente servire agli astronomi, si confrontò e si corresse sopra questa via d'una tavola calcolata all'uopo.

Tutti questi inconvenienti furono forse la cagione per la quale *Bird* si appigliò ad un altro metodo per dividere i suoi quadranti. Egli determinava gli archi per via delle loro corde, che prendeva sopra una scala di parti eguali. Ma nemmeno questa seconda maniera è libera d'imperfezioni; poichè in primo luogo manca di precisione geometrica; ed in secondo luogo trasporta sul quadrante le inesattezze, che trovar si potessero nella scala.

La considerazione dell' importanza degli istromenti astronomici mi richiamò la mente a guardare il mio progetto della *Geometria del Compasso* sotto un punto di vista più favorevole. Cominciai a credere, che avrei fatto molto se avessi potuto dividere la circonferenza col solo compasso in più parti, che in sei. Quanto più avanti avessi potuto spingere la suddivisione, e quanto più questa fosse stata concorde colla divisione del quadrante in novanta gradi; tanto maggior servizio avrei prestato agli artefici d'astronomia. Avrei procurato loro la precisione geometrica; avrei risparmiato loro il tempo de' tentativi, il doppio genere di divisioni, la necessità di due piani, e l'uso non affatto sicuro, e non geometrico delle scale.

Mi testava solo il timore, che anche trovandosi per avventura questo nuovo metodo, non riuscisse poi complicato, e lungo a segno di non essere più abbastanza opportuno per l'uso. M'accesi all'opera. Vedendo che l'applicazione dell'algebra alla geometria non

m' assistiva molto in simil genere di ricerche; m' aggirai per altre strade quasi semplicemente geometriche, che io quì indicherei se giovasse; ma siccome io non ho tenuto gran fatto una traccia costante nel mio cammino, e devo molto all' accidente, che dopo varj andirivieni di ripieghi diversi, m' ha presentato, e non sempre così prontamente il risultato ch' io bramava, così non ne dirò nulla. Forse altri potrà specolare un filo in questa dottrina, che conduca per ordine da un problema all' altro, e che se si fosse scoperto da principio, avrebbe facilitata ed abbreviata l' invenzione.

Il primo saggio della mia riuscita l' indirizzai due anni fa con una lettera inserita nel Giornale Brugnarelli all' eccellente artista il Cittadino *Anibale Beccaria*, allora patrizio milanese, ed ora municipalista e socio dell' istruzione pubblica, il quale all' esser fratello del celeberrimo autore del libro de' *Delitti e delle Pene* aggiunge la gloria vera e propria d' eseguire, qualor gli piaccia, finissimi stromenti di matematica. Quel

mio saggio consisteva nel metodo di dividere la circonferenza in ventiquattro parti coll' ajuto d' un solo punto preso fuori d' essa . La costruzione di questa divisione è la più semplice, che si possa sperare, e l' ho ritenuta; l' altra in cento venti, che vi esposi, era troppo complicata; ora ne ho trovata una molto più breve, e tale, che la credo la brevissima. V' aggiunsi una spedita costruzione per avere le radici quadrate dall' uno sino alle dieci, che ho pur qui ritenuta. Gli altri problemi esposti in quella lettera siccome complicati, o di poca approssimazione, qui sono omessi.

Ora io sono giunto, come si vedrà dal libro, a dividere prontamente la circonferenza in dugento quaranta parti con esattezza geometrica per via del solo compasso e non adoperando altro che tre punti presi fuori della circonferenza stessa. Ciascuna di queste parti riesce di un grado e mezzo della divisione usata fin qui in gradi trecento sessanta. Divido, qualora piaccia, ogni arco in due. Ciò geometricamente. Per via di

approssimazione divido la circonferenza col solo mezzo di quei tali trepunti in gradi e quarti di gradi senza l'errore d'una sesta parte di minuto secondo. Cogli stessi tre punti divido pure in minuti primi stando sempre al di sotto dell'error d'un secondo. Che di questa precisione possano essere contenti gli astronomi, mi ha lusingato a crederlo il leggere, che nemmeno gli artisti più celebri sieno passati oltre.

Ma non mi sembrava aver fatto abbastanza se non serviva colle mie teorie anche alla nuova divisione del cerchio. E' noto che i Francesi felici di avere nel seno della loro repubblica geometri primi nell'universo, secondando i loro consigli, hanno finalmente appagato i lunghi desiderj dei dotti col sanzionare in tutte le arti la sola divisione decimale. Questa divisione forse lentamente in altre provincie per l'urto dei pregiudizj, e più per la riazione dell'inerzia, ma invincibilmente col tempo prenderà piede dovunque abbia luogo qualche amore alle scienze, o un ben

inteso interesse di commercio . Una delle divisioni , che dovevano riuscire più difficili ad alterarsi era quella della circonferenza del cerchio tra per l' antichità della divisione in 360 , e suddivisione in 60 ricevuta dalle nazioni tutte ; e per la fatica necessaria a rifar le tavole trigonometriche in qualunque nuovo sistema . Ma l' energia d' una grande nazione che si rigenera , ha vinto tutto . Fissate quattrocento parti , o gradi nella circonferenza , acciò il quadrante , che è il fondamento della trigonometria , resti diviso in cento , e ciascuna di queste centesime suddivisa in cento , e così via via ; si sono già calcolate e stampate le tavole dei seni naturali , e artificiali di quelle ; e perchè nulla manchi ad assicurare , ed accrescere la precisione de' numeri , cospirò la nuova scoperta de' Francesi di stampare con caratteri saldati in piombo ; e si han già tra ntano queste nuove tavole di tale edizione chiamata stereotipa eseguita da *Firmin Didot* . Più : se n' aspettano altre copiosissime con gran numero di decimali , che

si stanno preparando sotto la direzione del celebre *Prony* da una moltitudine di attivissimi calcolatori. Tutto ciò mi spinse a cercare un metodo almeno d'approssimazione per dividere la circonferenza in tali nuovi gradi e minuti, e m'è riuscito col ministero di que' soli tre punti d'avere con abbastanza pochi giri di compasso questi gradi e minuti centesimali senza il piccolo error d'un secondo.

Se null'altro si fosse fatto; si sarebbe non ostante raccomandato abbastanza il maneggio del puro compasso. Ma strada facendo ho trovato non esserci problema di geometria elementare, che col compasso solo non si potesse risolvere; in questo senso cioè di trovar tutti que' punti, che si richieggono nel problema per la posizione e determinazione delle rette, che v'abbisognano. Questo interessava la teoria. Ho voluto esaurire l'argomento; dare tutti gli elementi a tal uopo, e dimostrare che tutti i punti che *Euclide* o altri elementaristi trovano col sussidio del compasso e della riga congiunti; col solo primo strumento trovar si possono.

Non tutti i problemi elementari sciolti col solo compasso hanno un'abbastanza semplice costruzione. Ardisco però dire che la maggior parte dei più necessarij son brevi e succinti a segno, che chi vorrà risolverli nella pratica, troverà meglio servirsi del sol compasso per trovarne i punti fondamentali, ripudiando la riga; le vie che propongo nel libro giustificheranno quanto dico.

Io non indicherò quì tutti que' Problemi di simil genere, che mi sembrano di qualche importanza. Eccone non ostante alcuni. Se si vorrà trovare col compasso solo il centro d'un cerchio; si avrà con pochi tratti speditamente. Egualmente si avranno le terze, e le quarte proporzionali; non dico le medie. Chi vorrà costruire poligoni regolari non solo entro o intorno a cerchi dati, ma sopra basi date; ne avrà il mezzo facile nel compasso (*). Chi vorrà trovare radici quadrate di numeri, cioè duplicare, o moltiplicare comunque

(*) Gli architetti militari vi troveranno forse molte cose a proposito degli usi loro.

di area quadrati, o cerchi, o figure simili di qualunque specie; lo farà presto per via del compasso. E tutto ciò con geometrica precisione; essendone capace la natura di tali problemi. Per approssimazione poi chi vorrà avere una lunghezza eguale alla circonferenza d'un cerchio, o un arco eguale al raggio, o un quadrato eguale ad un cerchio, o un cerchio eguale ad un quadrato, o un cubo eguale ad una sfera, o una sfera eguale ad un cubo, o un cubo doppio d'un altro, o triplo, o quadruplo; potrà avere impiegando sezioni d'archi, ossia determinando sempre non con altro che col compasso la lunghezza di que' lati o di quei raggi, che abbisognano alle richieste figure.

Ecco in breve quanto forma la *Geometria del Compasso*, che presento al Pubblico. Quanto alle dimostrazioni, ho studiato di farle geometriche all'antica. Questo m'è parso più proprio della natura de' miei problemi, e più breve. Dovunque geometricamente erano per riuscir troppo lunghe, ho scorciato il cammino col cal-



colo. Ho dunque servito ad un tempo alla brevità, alla chiarezza, ed all'eleganza quanto ho potuto farlo. Ho citato Euclide il gran maestro degli elementi. Dove occorrono proporzioni; i numeri delle proposizioni ch'io cito, son quelli del *Tacquet*. La ragione di ciò è, che questo libro è più nelle mani di tutti, che l'antico testo d'Euclide. Ho posti in carattere più grande i paragrafi, che serviranno maggiormente agli artisti. Chi ne vuole la dimostrazione, deve leggere tutto il libro. Chi non vuole che la parte pratica, potrà omettere quanto è stampato in minor carattere. Ciò lo faranno gli artisti; lo farà chi non vuole che divertirsi col compasso. A questo genere di divertimento ho assegnati molti problemi tratti da *Pappo* dall'*Ozanam* dal *Simpson* e da altri, che ho messi nel libro undecimo. Ecco tutto ciò che io aveva a dire a' miei lettori sopra questa *Geometria del Compasso*, che loro presento, la quale per la costruzione de' suoi problemi è la più semplice e la più elementare geometria che aver si possa; e che da nissuno finora, ch'io sappia, s'era toccata.



DELLA GEOMETRIA DEL COMPASSO

LIBRO PRIMO

PRELIMINARE.

1.  C  *Hiamo' Geometria del Compasso*
quella, che per via del solo
compasso senza la riga deter-
mina la posizione de' punti.

Dati per esempio due punti A, ed E Fig. 1.;
se si cerchi il terzo D, che sia tanto lon-
tano da ciascuno di essi, quanto essi lo sono
tra loro; si descrivano coll'intervallo, ossia
raggio AE, e coi centri A, ed E i due
cerchi EDB, ADV, che si tagliano nel
punto D; questo punto sarà il cercato; poi-
chè sarà lontano dai punti A, ed E d'un
intervallo eguale ad AE (Prop. 1. lib. 1.

A

Euel.) - Questo punto D si è trovato col solo compasso senza la riga.

1. Può accadere, che la posizione di un punto si trovi col solo compasso; ma per dimostrare la proposizione ci sia bisogno di costruire la figura col mezzo della riga.

Se per esempio, dati due punti A, e B, che Fig. sieno lontani tra loro d'un certo intervallo, che si prende per l'unità, ossia si fa $= 1$; si cerchi un punto D, che sia lontano da B dell'intervallo $BD = \sqrt{3}$; la soluzione del Problema sarà come segue.

Col centro A, raggio AB si descriva il cerchio BCD. Collo stesso raggio, centro B si descriva un arco, che tagli la circonferenza in C. Di nuovo collo stesso raggio, centro C si descriva un arco, che tagli la circonferenza più oltre in D. Sarà questo il punto cercato, e trovato senza la riga.

Per dimostrare ondimento, che sia l'intervallo $BD = \sqrt{3}$, vi sarà d'uopo di linee rette, le quali si segnano colla riga. Sia BE il diametro del cerchio BCD, e si guidino le rette BD, DE. Sarà il triangolo BDE rettangolo in D (31. lib. 3.). Sarà dunque il quadrato della BE eguale alla somma de' due quadrati delle rette BD, e DE (47. lib. 1.); e però il quadrato della BD sarà eguale alla differenza de' quadrati della BE, e della DE. Ma essendo l'intervallo $BC =$

$CD = AB$; sarà ancora $DE = AB$ (15. lib. 4.), ossia $DE = 2$. E' ancora $BE = 2$. Sarà dunque $(BD)^2$, cioè il quadrato della BD eguale a $4 - 1 = 3$; e però la sua radice $BD = \sqrt{3}$. Il che era da dimostrarsi, e non si è potuto fare senza la riga. Questa Proposizione è la 12. del lib. 13. d' Euclide.

3. Dalla definizione di questa Geometria del Compasso (§. 1.) è chiaro, che appartengono ad essa tutti i Problemi, che si possono sciogliere col compasso solo, benchè per esso solo non si possano dimostrare; com'è il Problema precedente (§. 2.).
4. L'uso di questa Geometria sarà grandissimo, come apparirà dagli esempj, nel trovare i punti in pratica colla maggior precisione possibile, e spesso molto più speditamente col solo compasso, che chiamando in soccorso anche la riga.
5. Sarà dunque nostro ufizio sciogliere i Problemi col solo compasso; sarà poi lecito servirsi di dimostrazioni costruite secondo l'uso col compasso, e colla riga, al qual fine citeremo le proposizioni, e i libri di Euclide.
6. Così poi verremo a capo di questo trattato, che non abbia a mancare alcun elemento, perchè col solo compasso si possano determinare tutti que' punti di qualsivoglia Pro-

blema, che fino adesso col cerchio e colla riza solevansi determinare.

7. Non pertanto noi non porremo quì tutti questi Problemi; ma dimostrati gli elementi necessarij, e bastanti per tutti, tra essi sceglieremo un buon numero de' principali, cioè tutti quelli, che ci sembreranno i più utili, o per una certa eleganza pregevoli.
8. Aggiungeremo quì in favore degli artisti, in grazia de' quali in gran parte quell'opera è stata scritta, che sapendo essi la molestia, e il pericolo d'errare, che nasce dall'allargare, e stringere il compasso a varie aperture precise; noi procureremo di sciogliere i Problemi col minimo numero possibile di aperture di compasso. Sarà poi anche meglio per l'artista avere in pronto tanti compassi *fedeli*, come li chiamano, ossia tali, che uno si possa assicurare, che conservino appunto l'apertura data; quante sono le aperture, che richiede la soluzione del Problema. Poichè accaderà spesso, che dovremo adoperar più volte la stessa apertura dopo averne adoperata una o più altre; così senza allargare, o stringere un sol compasso, ripiglieremo quell'altro compasso messo da parte,

che la conserva. A questo fine alcune volte chiameremo col nome di compasso primo, secondo, terzo le aperture successive, colle quali verrà sciolto il Problema.

9. Essendo oltre ciò importante alla precisione pratica della posizione di un punto, che la sezione delle linee, che lo determinano, si faccia ad angoli retti o vicini al retto; faremo sempre in modo, che un arco tagli l'altro o ad angoli retti, se ciò ne riuscirà, o almeno ad angoli non molto lontani dal retto.

10. Per essere più brevi, senza però riuscire oscuri, nell'indicare le costruzioni delle figure adopereremo spesso alcuni compendj, che saranno tolto intesi al solo guardar la figura. Per esempio nella Fig. 2. in luogo di dire: col raggio AB, e col centro B si descriva un arco, che tagli la circonferenza BCD nel punto C. Poi collo stesso raggio, e col centro C si descriva un arco, che tagli la stessa circonferenza in D ec.; diremo solamente: si faccia $AB = BC = CD$, ec. Poichè è abbastanza chiaro, che i punti B, C, e D, coi quali si indica la stessa cir-

conferenza B C D sono nella stessa; cosicchè non v'è alcun pericolo d'equivoco.

11. *Stessamente dati*

per esempio tre intervalli AB, CD, EF; se dirò; *si faccia a* $CD = EG$; *ad* $AB = FG$; si dovrà intendere che dica;

col raggio CD, e col centro E si descriva un cerchio, nella cui circonferenza sia il punto G. Quindi coll'intervallo AB, e col centro F si descriva un altro cerchio, che tagli il primo nel punto G.

12. Alle volte nelle dimostrazioni nomineremo alcune linee rette, che non saranno nella figura, nominando i due punti estremi, ai quali dovrebbero esser condotte; come se nella figura del §. 11. nominassi la retta AB, ovvero CD. Ciò faremo, quando non vi sarà pericolo d'oscurità, per conservar nitida la figura, e lasciate apparire meglio la costruzione fatta col solo cerchio.

13. *Lemma.* Se co' due centri A, e B, e co' raggi AP, ed AQ si descrivano degli ar-

Fig. chi, che si tagliano in P , e p ; Q , e q ; i
3. punti Q, P, p, q saranno nella stessa retta.

Dimostrazione. Essendo per costruzione eguali
rispettivamente tra loro tutti i lati de' trian-
goli APp, BPp ; l'angolo APp sarà eguale
all'angolo BPp (8. lib. 1.). Per la stessa
si dimostra essere $APQ = BPQ$. Dunque
la somma de' due APp, APQ è eguale alla
somma de' due BPp, BPQ . Ma la somma
di questi quattro angoli è eguale a quat-
tro retti (13. lib. 1. Coroll.). Dunque
ciascuna delle somme di due eguali equivale
a due retti. Dunque la Qpp è retta (14.
lib. 1.). Nella stessa maniera si dimostra,
che è retta la Ppq . Dunque i punti $Q, P,$
 p, q sono nella stessa retta.

14. Stanti le stesse cose del §. 13.; le rette
 AB, Pp , così AB, Qq si bipartiranno
egualmente in M ad angoli retti, e le $QP,$
 qp saranno eguali.

Dimostrazione. Poichè per l'eguaglianza de' lati
de' due triangoli APB, ApB si ha l'angolo
 $PAB = pAB$ (8. lib. 1.). Ma è an-
cora $APp = ApP$ (5. lib. 1.). Dunque
anche $AMP = AMp$ (Coroll. Proposiz.
31. lib. 1.). Dunque entrambi retti (13.
lib. 1.). E sarà Pp bipartita in M per la
dimostrazione della Prop. 10. lib. 1. Nella
stessa maniera si dimostrerà, che si bipartono
in M la Qq , e la AB . Dalle eguali poi

QM, e qM togliendo le eguali PM, pM i residui QP, qp saranno eguali.

15. *Corollario*. Sarà dunque $(QM)^2 = (AQ)^2 - (AM)^2$ (47. lib. 1.).

16. *Lemma*. Stanti le stesse cose del §. 13. sarà $(AQ)^2 = (AP)^2 + (PQ)^2 + PP \cdot PQ$.

Dimostrazione. Poichè è $(AQ)^2 = (AP)^2 + (PQ)^2 + 2MP \cdot PQ$ (12. lib. 2.). Ma è $2MP = PP$ (§. 14.). Dunque ec.

17. *Lemma*. Sarà pure $(AQ)^2 = (Ap)^2 + (pQ)^2 - pP \cdot pQ$.

Dimostrazione. Poichè è $(AQ)^2 = (Ap)^2 + (pQ)^2 - 2pM \cdot pQ$ (11. lib. 2.). Ma è $2pM = pP$ (§. 14.). Dunque ec.

18. *Corollario I*. Essendo $pQ = pP + PQ$; sarà $(pQ)^2 = pP \cdot pQ + PQ \cdot pQ$ (2. lib. 2.); quindi sottraendo $pP \cdot pQ$ si ha $(pQ)^2 - pP \cdot pQ = PQ \cdot pQ$. E fatta la sostituzione di questo valore nel valore di $(AQ)^2$ del §. 17., si avrà $(AQ)^2 = (Ap)^2 + pQ \cdot PQ$. Donde sottraendo di qua e di là $(Ap)^2$, nasce $(AQ)^2 - (Ap)^2 = pQ \cdot PQ$. Se ora si eseguisca la moltiplicazione di $AQ + Ap$ per $AQ - Ap$; si troverà $(AQ + Ap)(AQ - Ap) = (AQ)^2 - (Ap)^2$. Quindi si avrà $(AQ + Ap)(AQ - Ap) = pQ \cdot PQ$. Donde per la 16. lib. 6. si deduce l'analogia $pQ : AQ + Ap :: AQ - Ap : PQ$, ossia sostituendo AP in luogo di Ap, e in-

vertendo alternativamente

$$PQ : AQ + AP :: AQ - AP : pQ$$

Da queste due analogie vien espresso il celebre

4. *Teorema.* In qualunque triangolo un lato qualunque sia alla somma degli altri due; come la loro differenza ita alla differenza, o alla somma de' segmenti, che fa su quel lato la perpendicolare condotta dall'angolo opposto, secondo che essa cade dentro o fuori del triangolo.

19. *Corollario II.* Se sarà $AQ = pQ$; iolti di qua e di là l due termini eguali $(AQ)^2$, $(pQ)^2$, e aggiungendo d' ambe le parti pP , pQ ; risulterà $pP \cdot pQ = (Ap)^2$.

20. *Lemma.* Stanti le stesse cose (§. 13.), se sia retto l'angolo RpQ ; sia poi l'angolo

Fig. $RpS = RpA$; e $pS = pR = pA$; sarà

4. AS parallela, ed eguale alla Pp ; e sarà $(AQ)^2 = (RQ)^2 - AS \cdot pQ$.

Dimostrazione. Poichè se dai due angoli retti RpQ , Rpq si sottraggono i due eguali RpA , RpS ; rimarranno eguali gli angoli ApP , Spq . Ma $ApP = APp$ (§. lib. 1.). Dunque $Spq = APq$. Dunque AP , Sp sono parallele (§. 29. lib. 1.). Ma sono anche eguali per costruzione. Dunque le due AS , Pp sono eguali, e parallele (§. 33. lib. 1.). Si ha poi $(RQ)^2 = (Rp)^2 + (pQ)^2$ (47. lib. 1.) $= (Ap)^2 + (pQ)^2$. E pel Lemma

9. 17., $(AQ)^2 = (Ap)^2 + (pQ)^2 - pP \cdot pQ$. Dunque $(AQ)^2 = (RQ)^2 - pP \cdot pQ$, ossia $= (RQ)^2 - AS \cdot pQ$.

21. *Lemma*. Stanti le stesse cose (§. 11., e 20. sarà $(SQ)^2 = (RQ)^2 + AS \cdot pQ$.

Dimostrazione. Poichè se si faccia $ST = Sp$, $pT = pP$ (§. 11.); nei due triangoli SpT , APp si troveranno tra loro eguali gli angoli SpT , APp (8. lib. 1.); e però Pp retta (27. lib. 1.). Sarà poi $(SQ)^2 = (pS)^2 + (pQ)^2 + pQ \cdot pT$ (§. 16.). Ma è $(pS)^2 + (pQ)^2 = (pR)^2 + (pQ)^2 = (RQ)^2$; ed è $pT = pP = AS$. Dunque $(SQ)^2 = (RQ)^2 + AS \cdot pQ$.

Dai due Lemmi precedenti segue per Corollari essere $(AQ)^2 + (SQ)^2 = 2(RQ)^2$.

22. *Lemma*. Se sarà $AQ = pQ = BQ$:

Fig. $Ap = pB = pS$, essendo pS sulla circonferenza della Bp ; sarà $AS \cdot pQ = (Ap)^2$.

Dimostrazione. Avendo i triangoli isosceli AQp , BQp i lati eguali tra loro; sarà l'angolo $QpA = QpB$ (8. lib. 1.). Sarà poi l'angolo ApB , che è la somma dei due, eguale anche alla somma de' due angoli SAp , ASp (31. lib. 1.), i quali essendo eguali tra loro per essere isoscele il triangolo ApS (5. lib. 1.); sarà ciascuno d'essi eguale all'angolo $ApQ = pAQ$ (5. lib. 1.). Sarà dunque il triangolo pAS simile al triangolo QpA (32. lib. 1. 4. lib. 6.); e quindi

$pQ : Ap :: Ap : AS$, e $AS \cdot pQ = (Ap)^2$ (17. lib. 6.).

13. *Lemma*. Se sia $AB = AC = BD$; e $AD = BC$ sarà; $DC \cdot AB = (AB)^2 - (AD)^2$.

Dimostrazione. I due triangoli ADB , ACB

Fig. avendo i lati rispettivamente eguali, saranno eguali (8., e 16. lib. 1.). Essendo poi po-

5. sibili tutti e due sulla stessa base AB ; saranno fra le stesse parallele DC , AB (39. lib. 1.).

Se dunque sulla BA si prende $BE = DC$; sarà DE uguale, e parallela alla BC (33. lib. 1.), e uguale ancora alla DA . Quindi

i due triangoli isosceli BDA , DAE , che hanno un angolo comune in A , saranno simili (5. e 32. lib. 1., e 4. lib. 6.). e sarà

$AB : AD :: AD : AE$; quindi $AB \cdot AE = (AD)^2$ (17. lib. 6.). Si ha poi

$AB \cdot AE + AB \cdot BE = (AB)^2$ (2. lib. 2.). Quindi ad $AB \cdot AE$ sostituendo $(AD)^2$,

e a BE sostituendo DC ; si ha $(AD)^2 + AB \cdot DC = (AB)^2$. E sottraendo $(AD)^2$,

si avrà $DC \cdot AB = (AB)^2 - (AD)^2$.

14. *Lemma*. Se nel cerchio $B\mu G$ al raggio AB si alzi nel centro A la normale Ae eguale

Fig. alla corda BG dell' arco $B\mu G$; e fatto cen-

6. tro in e col raggio AB si descriva un arco, che tagli la circonferenza in μ ; sarà l' arco $B\mu$ eguale alla metà dell' arco $B\mu G$.

Dimostrazione. Per l'eguaglianza de' lati de' due triangoli ARG , $A\mu e$ è l'angolo $GAB = A\mu e$ (8. lib. 1.). Si divida per metà l'an-

angolo $A\mu e$ colla retta μM ; essendo isoscele il triangolo $\mu e A$, l'angolo $\mu e M = \mu A M$; quindi ne' due triangoli $\mu e M$, $\mu A M$ essendo eguali tra loro gli altri due angoli sarà anche $\mu M e = \mu M A$ (Coroll. 32. lib. 1.); quindi μM normale alla Ae (13. lib. 1.), e quindi parallela alla AB (29. lib. 1.), e sarà l'angolo $M\mu A = \mu A B$ (27. lib. 1.), sarà dunque $\mu A B$ la metà dell'angolo GAB , e però anche l'arco $B\mu$ metà dell'arco $B\mu G$.

25. Se nel parallelogrammo $ABMN$ sarà la diagonale MA eguale ai lati opposti MB , AN ; Fig. sarà il quadrato dell'altra diagonale BN eguale
7. al quadrato della prima aggiuntivi i due quadrati degli altri due lati.

Dimostrazione. Si divide AB per metà in m colla perpendicolare Mm (10. 11. lib. 1.), e sopra la BA continuata si prenda $An = Bm$; sarà $mn = BA = MN$; e però $MNnm$ parallelogrammo (33. lib. 1.), e sarà retto l'angolo NnB (27. lib. 1.). Quindi $(BN)^2 = (AB)^2 + (AN)^2 + 2AB \cdot An$ (12. lib. 2.). Ma $An = \frac{1}{2}AB$. Dunque $(NB)^2 = (AN)^2 + 2(AB)^2 = (AN)^2 + (AB)^2 + (MN)^2$.

26. Se in qualunque triangolo BPE si tagli in due egualmente la base BE in A , e dall'angolo opposto P si guidi la PA ; sarà la
Fig. somma de' quadrati dei lati BP , e PE egua-

le alla somma de' quadrati eguali dei due segmenti, aggiuntovi il doppio quadrato della AP.

Dimostrazione. Poichè se si cali il perpendicolo PR sulla base BE; sarà $(BP)^2 = (BA)^2 + (AP)^2 + 2 BA \cdot AR$ (12. lib. 2.). Sarà pure $(PE)^2 = (AE)^2 + (AP)^2 - 2 AE \cdot AR$ (13. lib. 2.). Fatta dunque la somma dei valori dei due quadrati $(BP)^2$, e $(PE)^2$, essendo $BA = AE$; sarà $(BP)^2 + (PE)^2 = (BA)^2 + (AE)^2 + 2(AP)^2 = 2(AB)^2 + 2(AP)^2$.



DELLA GEOMETRIA DEL COMPASSO

LIBRO SECONDO

DELLA DIVISIONE DELLA CIRCONFERENZA
E DEGLI ARCHI DEL CERCHIO.

PROBLEMA.

37. **D**ividere la circonferenza del cer-
chio BDd in quattro parti eguali.

^{9.} *Soluzione.* Nella stessa circonferenza si
faccia al raggio $AB = Bc = BC =$
 $CD = DE = Ed$ col primo compasso
(§. 10. 8.). Sarà $dc = cB = BA$
(15. lib. 4.).

Si faccia

a $BD = Ba = Ea$ col 2.^{do} compasso
ed $Aa = BF = Bf$ col 3.^o compasso.
Si avrà divisa la circonferenza in quat-
tro parti eguali BF, FE, Ef, fB .

Dimostrazione. Essendo BAE un diametro (15. lib. 4.); e avendo i triangoli a AB, a AE tutti i lati eguali, e però eguali gli angoli a AB, a AE (8. lib. 1.); questi saranno retti (13. lib. 1.). Dunque $(aB)^2 = (AB)^2 + (aA)^2$ (47. lib. 1.); e sottraendo $(AB)^2$ da tutte due le parti, si ha $(aB)^2 - (AB)^2 = (aA)^2$. Si faccia per brevità $AB = 1$; sarà $(aB)^2 = (BD)^2 = 3$ (§. 2.). Sarà dunque $(aA)^2 = 3 - 1 = 2$, e quindi anche $(BF)^2 = (aA)^2 = 2 = 1 + 1 = (AB)^2 + (AF)^2$. Dunque nel triangolo FAB l'angolo FAB sarà retto (48. lib. 1.), e però anche l'angolo FAE (13. lib. 1.). Saranno dunque gli archi BF, FE eguali tra loro, e quarti di cerchio, come pure gli archi Bf, fE.

18. *Corollario.* Essendo retti gli angoli B A a, B A F; i tre punti A, F, a saranno nella stessa retta.

29. Abbiamo dunque già la circonferenza divisa in due parti eguali per esempio nei punti B, ed E; in tre parti, come ne' punti B, D, d (15. lib. 4.); in quattro parti ne' punti B, F, E, f (§. 27.); in sei parti nei punti B, C, D, E, d, c (15. lib. 4.).

PROBLEMA.

30. Dividere una circonferenza in otto parti eguali.

Soluzione. Stanti le cose come al §. 2.
Si faccia

Fig. ad $AB = aG = aH$ compasso 1.^o
9.^o ad $Aa = Gg = Hh$ compasso 3.^o
sarà anche ad $Aa = gh$; e la circonferenza sarà divisa in otto parti eguali ne' punti B, G, F, H, E, h, f, g .

Dimostrazione. Poichè essendo $(Aa)^2 = (g, 27.)$; sarà $(Aa)^2 = (AG)^2 + (aG)^2$. Sarà dunque retto l'angolo aGA (48. lib. 1.). Quindi pel triangolo isoscele aGA gli altri due angoli GAa, GaA tra loro eguali (3. lib. 1.) saranno semiretti (32. lib. 1.). Dunque l'angolo GAF , che è lo stesso coll'angolo GAa (6. 28.), sarà la metà di BAF . Dunque anche l'arco $GF = BG$. Ma per costruzione è $Gg = BF$ (26. lib. 3.). Dunque tolto di qua e di là BG ; sarà $Gl = Bg$. Nello stesso modo si dimostrerà che gli altri archi sono eguali. Sarà dunque la circonferenza divisa in parti eguali ciascuna alla metà del quadrante, e però in otto

PROBLEMA.

31. **D**ividere la circonferenza in dodici parti eguali.

Soluzione. Stanti le cose come nel §. 27.,
 Fig. li faccia ad $AB = FN = NR = FO$
 9. $= Oo$. Sarà la circonferenza divisa in dodici parti eguali ne' punti B, N, C, F, D, O, E, o, d, f, c, n.

Dimostrazione. Poichè tolti via gli archi eguali BC, DE dagli eguali BF, FE; gli archi, che rimangono CF, FD saranno eguali. Essendo dunque CD la sesta parte della circonferenza (§. 29.); sarà CF la sua metà, cioè la duodecima. Sarà ancora $CF = CN$ a cagione di $FN = CD$; così pure $CN = NB$ a cagione di $FN = CB$. E nella stessa guisa si dimostrerà, che tutte le altre sono duodecime parti della circonferenza.

PROBLEMA.

32. Dividere la stessa circonferenza in ventiquattro parti eguali.

Soluzione. Stanti le stesse cose come sopra fig. (§. 30., e 31.); si faccia ad $AB = GI = 9. = LM = Gk = ki = Hl = lK = Hm = ml$ compasso 1.^o e sarà fatto.

Dimostrazione. Poichè se dagli archi eguali GF GB (§. 30.) si sottraggono gli eguali CF NB (§. 31.); resteranno eguali GC , GN ed essendo CN una duodecima parte della circonferenza (§. 31.); saranno GC , GN ventiquattresime parti di essa. Essendo poi $FN = GL$; tolto via FG ; sarà $NG = FL$. Dunque anche FL sarà una ventiquattresima, e la metà di FD (§. 31.) Nello stesso modo si dimostrerà essere eguali a questi gli archi DH , HO , FI , IC , con tutti gli altri determinati quì sopra.

33. Noi si siamo quì serviti senza citarle dell' Prop. 26., e 27. del lib. 3. d' Euclide che in un cerchio, o in cerchj eguali le rette eguali sottendono archi eguali; il che faremo anche in seguito per brevità.

34. Gli Antichi per via del centro A col raggio AB, e col solo compasso divisero la circonferenza in sei parti eguali. Le altre divisioni le ottenevano col compasso, e colla riga prendendo varj punti fuori della circonferenza. Ora noi abbiamo trovato un punto a tale, che solo basta a dividere la circonferenza in ventiquattro parti eguali col solo compasso. Il che è nello stesso tempo più spedito, e comodo, e porta ad una divisione pratica molto più accurata dell' antica.
35. Può sembrare elegante la serie delle aperture de' tre compassi, che bastano a quella divisione. Poichè si trova

$$\text{l'apertura del primo} = \sqrt{1}$$

$$\text{del terzo} = \sqrt{2}$$

$$\text{del secondo} = \sqrt{3}$$

36. *Lemma*. Se nel cerchio BGE sia il raggio $AB = 1$; sia poi l'arco BG un'ottava parte Fig. della circonferenza; sarà il quadrato della sua ^{10.} corda BG, ossia $(BG)^2 = 2 - \sqrt{2}$.

Dimostrazione. Sul diametro BE si cali la perpendicolare GP. Nel triangolo rettangolo GPA a cagione dell'angolo semiretto GAP sarà semiretto ancora AGP (32. lib. 1.). Saranno dunque eguali i lati GP, PA (6. lib. 1.). E' poi $(AG)^2 = (PG)^2 + (AP)^2$ (47. lib. 1.). Dunque $(AG)^2 = 2(AP)^2$; quindi $1(AG)^2 = 4(AP)^2$, ossia $2 = (2AP)^2$, e quindi $\sqrt{2} = 2AP$; $AP = \frac{1}{2}\sqrt{2}$;

$BP = AB - AP = 1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}$. Si ha poi, essendo retto l'angolo BGE (§. 31. lib. 3.), $BP : BG :: BG : BE$ (§. 4. lib. 6.); quindi (§. 17. lib. 6.) $BG^2 = BP \cdot BE = 2BP$. Dunque $(BG)^2 = 2 - \sqrt{2}$.

37. *Lemma*. Stanti le stesse cose del §. 36., sarà il quadrato della GE corda di tre orrave parti della circonferenza, ossia $(GE)^2 = 2 + \sqrt{2}$.

Dimostrazione. Poichè sarà $(BE)^2 = (GE)^2 + (BG)^2$ (47. lib. 1.). Ma $(BE)^2 = 4$; $(BG)^2 = 2 - \sqrt{2}$ (§. 36.). Dunque $4 = (GE)^2 + 2 - \sqrt{2}$, e togliendo 2, aggiungendo $\sqrt{2}$, si avrà $2 + \sqrt{2} = (GE)^2$.

PROBLEMA.

38. Essendosi già divisa la circonferenza in ventiquattro parti (§. 32.) eguali; suddividerla in quarantotto.

Soluzione. Si faccia

ad $aN = Be = Ec$ (§. 11.) compasso 4.^o

ad $AB = e\mu = e$, compasso 1.^o

- Fig. Saranno $K\mu, \mu N, M, , O$ quarantotto. ^{11.} tesine parti della circonferenza.

Dimostrazione. Se si concepiscono guidate le rette Aa, Nn, aN, aB (§. 12.); essendo retto l'angolo BAa (§. 27.); e l'angolo

$\angle BAN = \angle BAN$ (§. 31.), e i tre raggi AN , AB , AN eguali; sarà $(aB)^2 = (oB)^2 - Nn \cdot Aa$ (§. 10.); però a cagione di $aN = Bc$, sarà pure $(Bc)^2 = (aB)^2 - Nn \cdot Aa$. Essendo poi i triangoli eAB , eAE a cagione de' lati rispettivamente eguali, rettangoli in A (§. 13. lib. 1.); sarà $(Bc)^2 = (AB)^2 + (Ac)^2$ (47. lib. 1.). E però $(AB)^2 + (Ac)^2 = (aB)^2 - Nn \cdot Aa$. Ma è $(aB)^2 = (AB)^2 + (A'a)^2$. Sarà dunque $(AB)^2 + (Ac)^2 = (AB)^2 + (A'a)^2 - Nn \cdot Aa$; quindi sottraendo $(AB)^2$, si ha $(Ac)^2 = (A'a)^2 - Nn \cdot Aa$. Ma $(A'a)^2 = 2$ (§. 27.), e $Nn = 1$; essendo Nn corda d'una sesta della circonferenza (§. 31.). Dunque $(Ac)^2 = 2 - \sqrt{2} =$ al quadrato della corda dell'arco BG , che è l'ottava parte della circonferenza (§. 30., e 36.). Sarà dunque l'arco $B\mu = \mu G$ (§. 24.). Se poi da questi archi si sottraggono gli archi eguali BK , NG (§. 32.); saranno gli archi $K\mu$, μN eguali. Essendo dunque l'arco KN la vigesimaquarta parte della circonferenza (§. 32.); saranno le sue metà, ossia gli archi $K\mu$, μN , e per la stessa ragione gli archi M , ν , O la quarantottesima parte della circonferenza.

39. Stanti le stesse cose potrebbe chi vo-
 lesse col solo ajuto de' quattro compassi
 indicati quì sopra dividere tutta la cir-
 conferenza in quarantotto parti eguali
 11. (§. 8.). Poichè se pel primo compasso
 di apertura $= AB$ si divida la circon-
 ferenza in sei parti cominciando dal pun-
 to μ ; si bipartiranno gli archi IF , HO ,
 mo , fl , ng . Dividendo poi la cir-
 conferenza in sei parti cominciando dal
 punto ν ; resteranno divisi gli archi oh ,
 fi , nk , NG , FL . Dividendo poi la
 circonferenza in quattro parti col terzo
 compasso di apertura eguale ad Aa co-
 minciando dal punto μ ; resteranno di-
 visi gli archi LD , ic ; cominciando poi
 dal punto ν ; resteranno divisi gli archi
 IC , ld . In seguito dividendo la cir-
 conferenza in sei parti eguali di nuovo
 col primo compasso, ma cominciando
 dagli ultimi punti trovati col terzo com-
 passo; resteranno divisi per metà tutti
 gli altri archi.

La Dimostrazione è simile a quella del §. 39.

PROBLEMA.

40. **D**ividere la circonferenza BDd in cinque parti eguali.

Soluzione. Stanti le cose come nel Problema §. 31.; si faccia ad $Aa = Nb$
Fig. 12. $= Ob$; compasso 3.*

Si faccia a $Bb = BQ$.

Sarà l'arco BQ la quinta parte della circonferenza.

Dimostrazione. Se si concepiscano condotte due rette NO , AF , che si tagliano in X ; a cagione de' triangoli equilateri FNA , FOA la retta FA sarà bipartita in X (10. lib. 1.); così pure NO (§. 14.). Essendo poi l'arco NFO eguale all'arco BCD (§. 31.), sarà il quadrato della sua corda NO eguale al quadrato della corda $BD = 3$ (§. 2.), il quadrato poi della sua metà NX , ovvero $(NX)^2 = \frac{1}{4}$ (per Coroll. della Prop. 4. lib. 2.). Sono poi nella stessa retta i punti b , A , X , e il triangolo NbX rettangolo (§. 12. 13. 14.); così $(Nb)^2 = (Ax)^2 = 2$ (§. 27.). Laonde $(Xb)^2 = (Nb)^2 - (NX)^2$ (47. lib. 1.) $= 2 - \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$. Ma per l'angolo retto XAB lo stesso che FAB si ha $(BX)^2 = (AB)^2 + (AX)^2$ (47. lib. 1.).

Ed è $(AX)^2 = \frac{1}{4} (AF)^2$ (per Coroll. Prop. 4. del 2.). Sarà dunque $(BX)^2 = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4} = (Xb)^2$. Dunque le rette BX , Xb sono eguali. Sarà dunque questo punto quello stesso, che adopera Tolomæo nel primo Libro dell'Almagesto per inscrivere un pentagono, e un decagono equilatero, e equiangolo nel cerchio. Vedi la dimostrazione del Clavio nello Scolio alla Prop. 10 del Libro 13. d'Euclide. Vedi ancora numeri seguenti (§. 45. ec.), dai quali risulterà la dimostrazione istessa di questa Proposizione, e delle seguenti.

PROBLEMA.

41. **D**ividere la circonferenza in dieci parti eguali.

Fig. 12.

Soluzione. Stanti le cose come nel Problema precedente (§. 40.), si faccia ad $A b = B P$, sarà $B P = P Q$; archi eguali alla decima parte della circonferenza.

Dimostrazione. Vedi 10. lib. 13. Eucl.

PROBLEMA.

42. Dividere la circonferenza in centoventi
Fig. parti' eguali.

Soluzione. Stanti le cose come ne' Problemi §§. 32., e 40., sarà QI la centoventesima parte della circonferenza.

Dimostrazione. Poichè l'arco BI è eguale a cinque ventiquattresime della circonferenza §. 32., e l'arco BQ eguale a una quinta.

$$\text{Dunque } QI = BI - BQ = \frac{5}{24} - \frac{1}{5} =$$

$$\frac{25 - 24}{120} = \frac{1}{120}.$$

43. Potrà chi voglia con soli quattro compassi, ossia quattro aperture d'un compasso, e con soli due punti presi fuori della circonferenza, cioè coi soli due punti *a*, e *b*, dividere la circonferenza del cerchio in centoventi parti eguali.

Poichè col punto *a*, e con tre compassi avendo divisa la circonferenza in 24. parti, Probl. §. 32., e avendo trovato il punto *b* §. 40. Si faccia col quarto compasso ad $Ab = BP = PQ = QR = RS$, a cui sarà pure eguale SE

§. 41. Ora per dividere l'arco NG, in cinque parti eguali, ciascuna delle quali sarà una centotesima; si faccia ad $Ab = Lq = qp = l\pi = Op = p\omega = \omega\phi$. Si avrà diviso l'arco NG in cinque parti eguali. Nello stesso modo si potranno dividere tutti gli altri archi GC, Cl ec.

Dimostrazione. Poichè essendo $BQ = RE$; $BF = FE$; $IF = FL$; sarà anche $IQ = LR$, ed essendo $Lq = QR$; sarà anche $Qq = LR = QI$. Nello stesso modo essendo $QP = qp$; sarà anche $Qq = Pp = QT$. Parimente a cagione di $l\pi = QP$; sarà $\pi P = QI$. Essendo poi $O\omega = BQ$; $OI = IB$; sarà ancora $I\omega = QI$; Inoltre a cagione di $\omega\phi = l\pi$; sarà $I\omega = \phi\pi = QI$. Essendo poi $Q\phi = O\omega + p\omega + \omega\phi = BP + PQ + QR = BR$, tolti di qua e di là gli archi eguali OG , BL ; si avrà il residuo $G\phi = LR = QI$. Finalmente a cagione di $Bl = LN$, tolti gli archi eguali BQ , Lp , sarà il residuo $QI = Np$. Si sarà dunque diviso d'arco NG ne' cinque archi Np , pP , $P\pi$, $\pi\phi$, ϕG eguali ciascuno all'arco QI , e però eguali tra loro. Essendo poi NG una ventesimaquarta della circonferenza (§. 32.), sarà ogni sua quinta parte una centotesima della circonferenza.

44. Abbiamo dunque ormai diviso col solo compasso la circonferenza in tante quelle parti eguali, le quali si ottenevano dagli Antichi inscrivendo al cerchio i cinque poligoni regolari triangolo, quadrato, pentagono, esagono e decagono, impiegando insieme il compasso, e la riga. E' poi riuscito di sommo comodo l'aver potuto ottenere tutto ciò coll'assumere solamente due punti fuori della circonferenza cioè a , e b , e coll'impiegare solamente quattro aperture di un compasso, ossia quattro compassi (§. 43-8.). Chi vorrà fare il confronto di questo metodo, col metodo conosciuto potrà giudicare della sua semplicità e speditezza, e della sua precisione nella pratica.

45. Essendo pel §. 40.

$$Xb + XF = Fb = Xb + XA$$

$$Ab = Xb - XA$$

$$\text{sarà } Fb \cdot Ab = (Xb)^2 - (XA)^2 = (Xb)^2 - (XA)^2 = (Ab)^2$$

ossia $Fb \cdot Ab = (FA)^2$; quindi la Fb sarà divisa in A in estrema e media ragione (30. lib. 6.).

46. Sarà quindi $Fb \cdot Ab = (FA + Ab) \cdot Ab$
 $= (fA)^2 = (fA + Ab) \cdot Ab = fA \cdot$
 $Ab + (Ab)^2 = fA (fA - fb) + (Ab)^2$
 $= (fA)^2 - fA \cdot fb + (Ab)^2$. Avendosi
 dunque $(fA)^2 = (fA)^2 - fA \cdot fb + (Ab)^2$.

- colla $(fA)^2$, e aggiunto $fA \cdot fb$; si av-
 — $fA \cdot fb = (Ab)^2$. Quindi anche la A
 sarà divisa in b in estrema e media ragione.
 47. Se nel centro b ; raggio bA si tagli la c-
 conferenza in T ; sarà $Tf = Tb = bA$.
 Poichè si avrà $fA \cdot fb = (Ab)^2$ (9. 46.)
 $= (Tf)^2$. E quindi (17. lib. 6.)
 $fA : fT :: fT : fb$. Dunque i due an-
 goli fAT , fbT , che hanno l'angolo co-
 mune in f , avranno i lati, che lo con-
 gono proporzionali; e quindi (6. lib. 6.)
 saranno simili. Sarà dunque isoscele anche
 triangolo fbT , e sarà $Tb = Tf$.
 48. L'angolo $TbA = Tfb + bTf$ (32. lib. 1.)
 $= Tb f + bAT$, e aggiungendo Tbf ; sarà
 $TbA + Tbf = 2Tbf + bAT$; ma TbA
 $+ Tbf =$ due retti (13. lib. 1.). Dunque
 $2Tbf + bAT =$ due retti. Ma $Tbf =$
 $bAT + bTA$ (32. lib. 1.) $= 2bAT$
 (5. lib. 1.). Dunque $2Tbf + bAT =$
 $5bAT =$ due retti. Quindi l'angolo bAT
 che è lo stesso coll'angolo fAT , sarà u-
 quinta di due retti, e l'arco fT una decima
 della circonferenza.
 49. Se si piglia la corda $ft = fT$; sarà pure
 $bt = ft$ (9. 47.), e le due ct , bf si
 raglieranno per metà ad angoli retti in un
 punto y (9. 14.); e sarà $(Tf)^2 = (Ty)^2$
 $+ (fy)^2$; quindi $4(Tf)^2 = 4(Ab)^2 =$
 $4(Ty)^2 + 4(fy)^2 = (Tc)^2 + (fb)^2$;

quindi $(Tt)^2 = 4(Ab)^2 - (fb)^2$. Ma
 $(fb)^2 = (fA - Ab)^2 = (fA)^2 - 2fA \cdot Ab + (Ab)^2$. Dunque $(Tt)^2 = 3(Ab)^2 - (fA)^2 + 2fA \cdot Ab$. Ora
 $2fA \cdot Ab = 2fA(fA - fb) = 2(fA)^2 - 2fA \cdot fb = 2(fA)^2 - 2(fA)^2 + 2(Ab)^2$.
 Dunque $(Tt)^2 = 3(Ab)^2 - (fA)^2 + 2(fA)^2 - 2(Ab)^2 = (fA)^2 + (Ab)^2 = (BA)^2 + (Ab)^2 = (Bb)^2$; e quindi
 $Tt = Bb$; Ma Tt è corda di due decime,
 ossia d'una quinta parte della circonferenza.
 Quindi anche Bb . Quindi

50. Nel triangolo rettangolo ABb il quadrato del lato del pentagono è eguale alla somma de' quadrati dei lati dell'esagono e del decagono. Questa è la 10. lib. 13. Euch.
51. I lati del triangolo rettangolo ABb sono corde di archi, che sono in progressione contrarmonica. Poichè questi archi sono $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$ della circonferenza. Si trova poi $\frac{1}{5} : \frac{1}{3} :: \frac{1}{2} : \frac{3}{10} :: \frac{1}{10} : \frac{1}{5}$.
52. Essendo $fb : bA :: bA : Af$ (§. 46.); è ancora $fb : bA :: bA : AF$; e quindi il diametro Ff resta diviso ne' punti A , e b in tre parti continuamente proporzionali.

PROBLEMA.

53. Dividere la circonferenza in venti parti, ossia trovare una ventesima parte di essa.

Soluzione. Stando le cose come al §. 40.; nel quadrante BVf si faccia $Bb = fV$. Sarà l'arco BV una ventesima.

Dimostrazione. Poichè è $BV = Bf - fV = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} (\S. 40.) = \frac{1}{20}$.

Altra Soluzione. Stando pure le cose come al §. 40.; nel quadrante BVf si faccia ad $AB = bV$. Sarà l'arco BV una ventesima.

Dimostrazione. Essendo Ab corda d'una decima; sarà l'arco BV la metà d'una decima, ossia una ventesima (§. 24.).

54. A cagione di $Vb = VA$ il triangolo AVb è isoscele come bTf . Inoltre essendo $FA : Ab :: Ab : bf$ (§. 52.), ossia sostituendo valori eguali $VA : Ab :: Tb : bf$; i due triangoli isosceli avranno i lati proporzionali; quindi saranno simili (6. lib. 6.).
55. Essendo pure $bF : FA :: FA : Ab$ (§. 45., e 17. lib. 6.); sostituendo valori eguali si

- avrà $bF : bV :: bV : Ab$. E però ne' due triangoli bFV , bVA si avranno i lati proporzionali, che formano l'angolo comune in b , e però i triangoli saranno simili (6. lib. 6.). Sarà dunque isoscele anche il triangolo bFV , e sarà $FV = Fb$.
6. Essendo l'arco fV una quinta (§. 53.); fT una decima (§. 47.); sarà pure TV una decima; quindi la corda $TV = Tf = Tb = bA$. Ma è anche $Vb = TA$ (§. 53.). Dunque i due triangoli VTb , TbA avranno tutti i lati rispettivamente eguali, e saranno eguali (8. 4. lib. 1.).

PROBLEMA.

57. **D**ividere una circonferenza in 240. parti eguali.

Soluzione. Stanti le cose come al §. 43., Fig. per mezzo de' §§. 38., e 39. si divida egualmente in due l'arco NG in A . Si può far questo facendo al raggio del cerchio e , eguali le corde $\alpha\beta$, $\beta\delta$. Saranno i due archi PA , $A\pi$ ciascuno una duecentoquarantesima. Vedi ancora §. 53.

Dimostrazione. Poichè sottraendo dalle due metà $N\delta$, $G\delta$ gli archi eguali NP , $G\pi$ (§. 43.); resterà $P\delta = \delta\pi$. Ma $P\pi$ è una centovesima (§. 43.); dunque cc.

58. Con una apertura di compasso presa dal punto δ ad un qualunque punto per esempio N della divisione già ottenuta al §. 43., si potrà proseguire a dividere in due tutte le parti centovesime di quel §. Per esempio, con questa apertura fatto centro in p si dividerà l'arco $\pi\varphi$; fatto centro in P , si dividerà l'arco φG , e così via via.
59. I tre punti a , c & b Fig. 12., ed c Fig. 11., sono sommamente osservabili. Poichè col mezzo di que'soli presi fuori della circonferenza abbiamo diviso la stessa in ducentoquaranta parti eguali, e siamo pure arrivati a determinare una ducentoquarantesima parte per via di sole cinque aperture di compasso, cioè AB , BD , Aa , aN , Ab . Potendo questi servire ad altri molti usi insigni nel seguito; troveremo per rapporto ad essi tre equazioni fondamentali, dalle quali ne ricaveremo a suo luogo altre dodici, e ne dimosteremo gli usi, quando ne verrà l'occasione.

PROBLEMA.

0. **D**ividere un qualunque arco BC in
 8. due parti eguali in G .
 3.

Soluzione. Col raggio AB , col quale è stato descritto l'arco BC , che si deve dividere, e coi centri B , e C , che sono i due punti estremi dell'arco, si descrivano gli archi AD , AE . Si faccia $BC = AD = AE$ (§. 10.). Poi coi centri D , ed E , e col raggio $DC = BE$ si descrivano due archi, che si taglino in F . Ora col raggio AF , e cogli stessi centri D , ed E si descrivano due altri archi, che si taglino in G . Sarà il punto G nella circonferenza, e sarà l'arco $BG = GC$.

Dimostrazione. Essendo eguali i lati rispettivamente nei tre triangoli DBA , BAC , ACE ; sarà l'angolo $BCA = CAE$ (8. lib. 1.). Quindi BC parallela ad AE (28. lib. 1.). Quindi $BAEC$ sarà un parallelogrammo (33. lib. 1.). Nella stessa maniera si proverà, che è un parallelogrammo $BCAD$. Si ha poi nel parallelogrammo $BCAD$ la diagonale AB eguale ai lati opposti BD , AC .

Dunque il quadrato della diagonale DC sarà eguale alla somma del quadrato dell'altra diagonale AB, e de' due quadrati de' due lati AD, BC (4. 25.); ossia sarà $(DC)^2 = (AB)^2 + 2(AD)^2$. Essendo poi alla retta BC parallele le due DA, AE; i punti DAE saranno nella stessa retta. In oltre avendo i triangoli FAD, FAE tutti i lati eguali; saranno eguali gli angoli FAD, FAE (8. lib. 1.), e però entrambi retti (13. lib. 1.). Sarà dunque $(DF)^2 = (AD)^2 + (AF)^2$; ma $(DF)^2 = (DC)^2$. Dunque $(AD)^2 + (AF)^2 = (AB)^2 + 2(AD)^2$; e tolto $(AD)^2$ sarà $(AF)^2 = (AB)^2 + (AD)^2$. Ma ad $(AF)^2 = (DG)^2$. Dunque $(DG)^2 = (AB)^2 + (AD)^2$. Ma perchè i triangoli GAD, GAE hanno i lati eguali; gli angoli GAD, GAE sono eguali, e retti (8., e 13. lib. 1.). Dunque $(DG)^2 = (AG)^2 + (AD)^2$. Dunque $AB = AG$; e però il punto G è nella circonferenza. Toki poi dagli angoli retti GAD, GAE gli angoli eguali BAD, CAE; gli angoli BAG, GAC restano eguali. Dunque l'arco BC si è diviso egualmente in due in G (13. lib. 6.).

Avvertimento.

Se l'arco da dividersi fosse assai piccolo come bc , sarebbe meglio in pratica aggiungerli di qua, e di là archi eguali un poco grandi, come bB , cC , e tagliare poi per mezzo l'arco BC in G , dove sarà pure diviso per mezzo l'arco bc .

2. Se l'arco da dividersi fosse troppo grande come PGQ ; sarebbe spedito toglier da esso di qua, e di là archi eguali PB , QC , acciochè riuscisse mediocre l'arco di mezzo BC ; quindi divider quello per metà in G , dove resterà pure diviso per metà l'arco PGQ .

3. Ecco dunque che tutto ciò, che appartiene alle divisioni della circonferenza, o degli archi del cerchio, e che si può eseguire col compasso, e colla riga, si può ancora ottenere col compasso solo.



DELLA GEOMETRIA DEL COMPASSO

LIBRO TERZO

DELLA MOLTIPLICAZIONE, E DIVISIONE
DELLE DISTANZE IN LINEA RETTA.

PROBLEMA.

64. **D**uplicare la distanza AB.

Soluzione. Col centro A, raggio AB si
Fig. descriva una semicirconferenza BCDE;
2. cioè si faccia ad $AB = BC = CD$
 $= DE$ (§. 10.). Sarà la BAE retta,
e doppia della AB.

Dimostrazione. Vedi la 13. lib. 4.

PROBLEMA.

5. **T**riplicare, quadruplicare ec. una distanza AB .

Soluzione. Alla AB si aggiunga l'eguale AE (§. 64.). Collo stesso metodo s'aggiunga l'eguale EV ec. Sarà la $BAEV$ retta eguale a $3AB$. Collo stesso metodo seguitando si quadruplicherà ec.

Dimostrazione. La BAE è retta (§. 15. lib. 4.); istessamente la AEV ; dunque ec. ec.

PROBLEMA.

6. **D**ividere in due parti eguali la distanza AB , ossia trovare il punto M , che è sulla retta AB alla sua metà.

Soluzione I. Descritta la semicirconferenza $BCDE$ (§. 64.); col centro E raggio EB si descriva un arco indefinito PBp . Col centro B , raggio BA si descriva la semicirconferenza $pAPm$. Col centro P , raggio PB si descriva l'arco BM . Si faccia a $Pm = BM$. Sarà M il punto cercato.

Dimostrazione. La retta Bm sarà sulla continuazione della Bp (15. lib. 4.). Sostituendo le tre eguali BP , Bp , Bm alle tre eguali Ap , pB , pS del §. 21., e le tre PE , BE , pE alle tre AQ , pQ , BQ , e la Pm alla AS ; l'equazione $AS \cdot pQ = (Ap)^2$ del §. 21. si cangerà nella $Pm \cdot BE = (BP)^2$; ed essendo $BE = 2AB$; $BP = AB$; sarà $2AB \cdot Pm = (AB)^2$, e dividendo per AB ; $2Pm = AB = 2BM$. Sarà poi il triangolo BPM d'angoli eguali al triangolo BPm (8. lib. 1.). Quindi mP parallela alla BM (18. lib. 1.). Ma anche i due triangoli BPm , BPE hanno gli angoli eguali (§. 21.). Dunque mP è parallela alla BE (18. lib. 1.). Dunque le rette BM , BE coincidono.

Soluzione II. Col raggio AB , centro A Fig. si descriva la semicirconferenza BCD ^{15.} (§. 64.). Collo stesso raggio, e coi centri B , ed E si segnino due archi indefiniti CP , DQ . Cogli stessi centri B , ed E , e col raggio BE si segnino i due archi EQ , BP . Col centro P , raggio PB si descriva l'arco BM . Col centro E , raggio PQ si tagli l'arco BM in M . Sarà M il punto cercato.

Dimostrazione. Fatto le debite sostituzioni nella Fig. 5. (§. 23.); si avrà $PQ \cdot BE = (BE)^2 - (BP)^2$; ed essendo $BE = 2AB$; $BP = AB$; $PQ = ME$; sarà $2ME \cdot AB = 4(AB)^2 - (AB)^2 = 3(AB)^2$. Quindi dividendo per AB , si avrà $2ME = 3AB$. Ma per essere eguali i lati opposti; sarà $PQEM$ un parallelogrammo. Poichè diviso in due triangoli di lati eguali colla diagonale QM dà l'angolo $PQM = QME$ (8. lib. 1.), e quindi PQ parallela ad ME (28. lib. 1.), così PM a QE (33. lib. 1.). E' poi anche PQ parallela alla BE (§. 23.). Dunque ME, BE coincidono. Essendo dunque perciò $ME = MA + AE = MA + AB$; sarà $2ME = 2MA + 2AB = 3AB$; quindi $2MA = AB$.

Soluzione III. Col centro A , raggio AB Fig. 16. si descriva la semicirconfenza $BCDE$ (§. 64.). Col centro B , raggio BE si descriva l'arco indefinito $P'Ep$. Col centro E , raggio EC si tagli quello in P , e p . Coi centri P , e p , e collo stesso raggio PE si descrivano due archi, che si taglino in M . Sarà M il punto cercato.

Dimostrazione. Il punto M sarà sulla retta BE (§. 13.); e sostituendo nell'equazione (§. 19.) $pP \cdot pQ = (Ap)^2$ le distanze, ossia le rette corrispondenti di questa Figura, ne verrà l'equazione $EM \cdot EB = (PE)^2$. Quindi a cagione di $(PE)^2 = (EC)^2 = 3(AB)^2$ (§. 12. lib. 13.) (§. 2.), si avrà $2AB \cdot EM = 3(AB)^2$, e dividendo per AB; $2EM = 3AB$; ovvero $2AE + 2AM = 3AB$; e tolte le quantità eguali $2AE$, $2AB$, risulta $2AM = AB$.

Soluzione IV. Descritta la semicirconferenza BCDE (§. 64.); col centro B, e col raggio BD si descriva un arco indefinito aDp. Collo stesso raggio BD, centro E si tagli quest'arco in a. Col raggio Aa, e col centro E si tagli quest'arco aDp in P, e p. Collo stesso raggio Aa, e coi centri P, e p si segnino due archi, che si taglino in M. Sarà M il punto cercato.

Dimostrazione. Il punto M sarà sulla retta BE (§. 13.). Fatto poi le debite sostituzioni nell'equazione $(AQ)^2 = (Ap)^2 + pQ \cdot PQ$ (§. 18.); si avrà $(PB)^2 = (PE)^2 + EB \cdot MB$; ossia $(BD)^2 = (Aa)^2 + 2AB \cdot MB$;

ossia $3(AB)^2$ (12. lib. 13.) (§. 2.) =
 $2(AB)^2$ (§. 27.) + $2AB \cdot MB$. Quindi
 sottraendo $2(AB)^2$, risulta $AB = 2MB$.

Molte altre Soluzioni si possono dare a questo
 Problema o adoperando nuovi raggi di cerchio,
 o combinando tra loro le Soluzioni date qui
 sopra; ma s'imo superfluo indicarle. Una
 assai semplice, ma che però in pratica non
 conduce a molta esattezza, perchè in essa
 l'intersezione degli archi si fa ad un angolo
 troppo acuto, è la seguente.

Soluzione V. Col raggio AB , centro A
 Fig. ^{14.} descritta la semicirconferenza $B C D E$
 (§. 64.); col centro E , raggio EB
 descritto l'arco indefinito $P B p$; col
 centro B , raggio BA tagliando quest'
 arco in P , e p ; con quelli centri
 P , e p , e collo stesso raggio BA si
 descrivano due archi, che si taglino in
 M . Sarà M il punto cercato.

Dimostrazione. Il punto M sarà sulla BE (§. 13.).
 Essendo poi simili i due triangoli isosceli
 PBM , PBE a cagione d'un angolo alla base
 comune in B (§. 1. c 32. lib. 1. 4. lib. 6.);
 sarà $BE : BP :: BP : BM$; quindi (17.
 lib. 6.) $BE \cdot BM = (BP)^2 = (AB)^2$,
 ossia $2AB \cdot BM = (AB)^2$; quindi divi-
 dendo per AB , risulta $2BM = AB$.

PROBLEMA.

67. **P**rosequire a suddividere in due parti
Fig. eguali colla più semplice costruzione; la
18. AM in N ; la AN in O ; ec. all'in-
finito.

Soluzione I. Essendo stata descritta la semi-
circonferenza BCE col raggio AB
(§. 64.), e collo stesso raggio, e col
centro B l'arco indefinito $P'CAp'$; coi
centri E , e B , e col raggio BE i due
archi $R'Q'P'Bp'q'r'$, $PQR Erqp$;
col centro E raggio EC l'arco PCp ;
se coi centri F' , e p' , raggio AB si
descrivano due archi; essi si taglieranno
in M al mezzo della AB (Soluz. V.
§. 66.). Se coi due centri P , e p ,
raggio PE si descrivano due archi; essi
si taglieranno pure nel medesimo punto
 M (Soluz. III. §. 66.).

Ora si faccia ad $AP' = BQ' = Bq' =$
 $q'N = Q'N$ (§. 11.). Sarà il punto
 N alla metà della AM .

Si faccia ad $AQ' = BR' = Br' = r'O$
 $= R'O$. Sarà il punto O alla metà
della AN .

Seguitando nello stesso metodo si dividerebbe AO in due parti eguali ec. all'infinito.

Dimostrazione. S'immagini una retta $P'A$, che divide in due la base BE del triangolo $P'BE$ (§. 12.). Sarà $(BP')^2 + (P'E)^2 = 2(AB)^2 + 2(AP')^2$ (§. 16.). Quindi sostituiti i valori di $BP' = AB$, e di $P'E = 2AB$, e sottratto $2(AB)^2$; si avrà $3(AB)^2 = 2(AP')^2$, e quindi dividendo per 2, risulterà $(AP')^2 = (BQ')^2 = \frac{1}{2}(AB)^2$. Essendo poi N nella retta BE (§. 13.); sarà il triangolo isoscele $Q'BN$ simile al triangolo isoscele $Q'BE$ a cagione dell'angolo comune in B (§. 32. lib. 1., e 4. lib. 6.). Quindi $(BQ')^2 = BN \cdot BE$ (17. lib. 6.). Quindi paragonando tra loro i due valori di $(BQ')^2$, si avrà $\frac{1}{2}(AB)^2 = BN \cdot BE = 2BN \cdot AB$, e dividendo per $2AB$, si avrà $\frac{1}{4}AB = BN$. Dunque $AN = \frac{1}{4}AB$.

Stessamente si avrà $(BQ')^2 + (Q'E)^2 = 2(AB)^2 + 2(AQ')^2$ (§. 16.), quindi $\frac{1}{2}(AB)^2 + 4(AB)^2 = 2(AB)^2 + 2(AQ')^2$, e riducendo si avrà $\frac{7}{2}(AB)^2 = 2(AQ')^2 = (BR')^2$. Ma $(BR')^2 = BO \cdot BE = 2AB \cdot BO$. Dunque $\frac{7}{2}(AB)^2 = 2AB \cdot BO$, e quindi $\frac{7}{4}AB = BO$; ed $AO = \frac{1}{4}AB$ ec.

Soluzione II. Si faccia ad $AP = EQ = Eq = qN = QN$. Sarà il punto N alla metà della AM . Si faccia ad $AQ = ER = Er = rO = RO$. Sarà il punto O alla metà della AN . Seguitando collo stesso metodo si dividerebbe in due la AO , così via via all' infinito.

Dimostrazione. Poichè si ha (§. 26.) $(PE)^2 + (PB)^2 = 2(AB)^2 + 2(AP)^2$, e sostituiti i valori di $(PE)^2 = (CE)^2 = 3(AB)^2$ (12. lib. 3.) (§. 2.), e di $(PB)^2 = (BE)^2 = 4(AB)^2$; si ha $7(AB)^2 = 2(AB)^2 + 2(AP)^2$. Quindi tolti via $2(AB)^2$, e dividendo per 2, si ha $\frac{5}{2}(AB)^2 = (AP)^2 = (EQ)^2$. Ma $(EQ)^2 = EN \cdot EB$ a cagione de' triangoli isosceli simili EQN , EQB (§. 13.) (§. 1., e 31. lib. 1. 4., e 17. lib. 6.). Dunque $\frac{5}{2}(AB)^2 = EN \cdot EB = 2EN \cdot AB$; e dividendo per $2AB$ si ottiene $\frac{5}{4}AB = EN$; ed $AN = \frac{1}{4}AB$.

Collo stesso metodo ragionando si avrà $(QE)^2 + (QB)^2 = 2(AB)^2 + 2(AQ)^2$. Quindi $\frac{5}{2}(AB)^2 + 4(AB)^2 = 2(AB)^2 + 2(AQ)^2$. Quindi pure $\frac{5}{2}(AB)^2 = (AQ)^2 = (ER)^2 = EO \cdot EB = 2AB \cdot EO$. Quindi dividendo per $2AB$, si ottiene $\frac{5}{4}AB = EO$; ed $AO = \frac{1}{4}AB$ ec.

Soluzione III. Col centro A raggio AB
 13. descritta la semicirconférenza B C D E
 19. (§. 64.), collo stesso raggio AB, e
 coi centri B, ed E descritti gli archi
 CP, Dp indefiniti; cogli stessi centri
 B, ed E, e col raggio BE descritti
 gli archi E p q r, BPQR; si sarà po-
 tuto trovare il punto M col fare PM
 $= PB$; $EM = Pp$ (Soluz. II. §. 66.).

Ora si faccia ad $AP = BQ = QN = Eq$.

Si faccia pure $Qq = EN$.

Sarà il punto N alla metà della AM.

Si faccia parimente ad $AQ = BR = RO = Er$.

Si faccia pure ad $Rr = EO$.

Sarà il punto O alla metà della AN.

Ec.

Dimostrazione. Fatte le dovute sostituzioni nella
 Fig. 5. (§. 23.); si avrà $Qq \cdot BE =$
 $(BE)^2 = (BQ)^2$. Ma $BE = 2 AB$;
 $(BQ)^2 = \frac{1}{2} (AB)^2$ (Vedi la Dimostr.
 della Soluz. I.). Dunque $2 Qq \cdot AB =$
 $\frac{1}{2} (AB)^2 = \frac{1}{4} (AB)^2$, e dividendo per
 $2 AB$, e riducendo si ha $Qq = \frac{1}{4} AB$.
 Dunque anche $EN = \frac{1}{4} AB$. Dunque effeu-
 do la AB la stessa nelle due Figure 18., e
 19., saranno pure gli stessi i lati dei due
 triangoli Q'NE Fig. 18., QNE Fig. 19.

Quindi sovrapponendo i tre punti B, Q, E della Fig. 19. sovra i tre B, Q', E della 18., anche i punti N delle due Figure coincideranno. Dunque ec.

Istessamente facendo le dovute sostituzioni nella Fig. 5. (§. 23.) si ha $Rr \cdot BE = (BE)^2 - (BR)^2$. Ma $(BR)^2 = \frac{2}{3} (AB)^2$ (Dimostr. della Soluz. I.); dunque $Rr \cdot BE (BE)^2 = \frac{2}{3} (AB)^2$. Ovvero sostituendo $2 AB = 2 BE$; $2 AB \cdot Rr = 4 (AB)^2 - \frac{2}{3} (AB)^2$. E dividendo per $2 AB$, e riducendo si ha $Rr = \frac{2}{3} AB = OE$. Dunque coincidendo i punti E, R, B di questa Fig. 19. coi punti E, R', B della Fig. 18., ed essendo quì le RO, ed EO eguali rispettivamente alle R'O, EO della Fig. 18.; coinciderà anche il punto O. Quindi O sarà alla metà di AN. Nella stessa guisa si dimostrerebbe in seguito fino all'infinito.

Si potrebbero usare altre maniere di trovare gli stessi punti; ma passeremo ad altre divisioni della AB in un diverso numero di parti.

PROBLEMA.

68. **D**ividere in tre parti eguali la distanza AB .

Soluzione. Alla AB si aggiungano in
 Fig. 10. linea retta di qua, e di là le due distanze AE , BV eguali alla AB (§. 64.).
 Coi centri E , ed V , e col raggio EV si descrivano due archi indefiniti QVq , Pp . Cogli stessi centri E , ed V , e col raggio EB si descrivano due altri archi, che taglino i primi in Q, q , e P, p . Con questo stesso raggio EB , e coi centri P, p si descrivano due archi, che si taglino in T . Collo stesso raggio, e coi centri Q, q si descrivano due archi, che si taglino in t . Sarà la AB divisa in tre parti ne' due punti T, t .

Dimostrazione. I punti T, t saranno nella retta VE (§. 13.). Sarà poi il triangolo isoscele EPT simile all'isoscele EPV avendo un angolo comune in E (§. e 32. lib. 1. 4. lib. 6.). Dunque $(PE)^2 = ET \cdot EV$ (§. 17. lib. 6.). Sostituendo in questa equazione 1 PE , 2 AB , e 2d EV , 3 AB ,

ne verrà $\frac{1}{3} AB = ET$; e quindi $AT = \frac{1}{3} AB$. Nella stessa maniera si dimostrerà, che anche Bt è un terzo di AB , e quindi anche Tt ,

PROBLEMA.

69. **D**ividere una distanza AB in un qualunque numero di parti eguali.

Soluzione. Da un esempio, o due si ri-
Fig. leverà meglio la regola generale.

71.

Esempio I. Sia la distanza AB da dividerli in cinque parti eguali. Ad essa si aggiungano in linea retta le quattro distanze eguali alla medesima AE, EF, FG, GH (§. 65.), in maniera che resti quintuplicata in BH , ossia moltiplicata per tante unità, in quante parti si vuole dividere la medesima. Cogli estremi B , ed H come centri, e col raggio AB della lunghezza della distanza, che si vuol dividere, si descrivano i due archi indefiniti AC, GI . Cogli stessi centri B , ed H , e col raggio BH si descrivano i due archi HI, BC . Col centro C , e col primo raggio

gio AB si descriva un arco indefinito BQ . Col raggio CI centro I si descriva un arco, che tagli l'arco BQ in Q . Sarà la distanza BQ sulla direzione della BA , e sarà la quinta parte di essa. Se adesso alla BQ si aggiunge l'eguale Qq (§. 64.), quindi le altre eguali qr, rs , si avranno determinate tutte le quinte parti della BA .

Esempio II. Se si vuole dividere la BA in sette parti; si formi la BH sette volte maggiore della BA . Cogli estremi di questa cioè coi punti B , ed H , e col raggio AB si descrivano gli archi indefiniti AC, GI . Cogli stessi centri B , ed I , e col raggio BI si descrivano i due archi HI, BC . Col centro C , e col primo raggio AB si descriva un arco indefinito BQ . Col raggio CI centro I si tagli quell'arco in Q ; sarà BQ sulla direzione della BA , e sarà la settima parte di essa.

Dimostrazione. Essendo il triangolo CQI di lati rispettivamente eguali al triangolo IQH ; sarà l'angolo $CIQ = IQH$ (8. lib. 1.). quindi CI parallela ad HQ (28. lib. 1.). Essendo poi la CI parallela anche alla BH

(§. 23.), sarà il punto Q sulla BH . Quindi avendo i due triangoli isosceli CBQ , CBH un angolo alla base comune in B ; saranno simili (§. 1. e 32. lib. 1. 4. lib. 6.), e sarà $HB:BC::BC:BQ$, ossia $HB:AB::AB:BQ$. Quante volte dunque la HB sarà maggiore della AB , altrettante la AB sarà maggiore della BQ .

Soluzione II. Si voglia dividere la AB Fig. per esempio in cinque parti. Determinata, come nella Soluz. I., la BH cinque volte maggiore della AB ; col centro H , e col raggio HB si descriva un arco indeterminato CBe . Ora col raggio BA , e col centro B si descriva la semicirconferenza cCK (§. 64.). Collo stesso raggio AB , e col centro C si descriva l'arco BQ . Col raggio CK , e col centro B si tagli quell'arco in Q ; sarà BQ la quinta parte della BA posta sulla stessa direzione.

Dimostrazione. La retta BK sarà sulla continuazione della Bc (13. lib. 4.). Fatte perciò le dovute sostituzioni nel §. 21., si avrà $KC.BH = (BC)^2 = (AB)^2$; e quindi (17. lib. 6.) $BH:AB::AB:KC$. Ovvero $BH:AB::AB:BQ$. Quanto dun-

que la BH sarà maggiore della AB , tanto la stessa AB sarà maggiore della BQ ; e se sarà $BH = 5AB$, sarà anche $AB = 5BQ$. Per l'eguaglianza poi dei lati tra loro nei due triangoli BKC , BCQ si avrà l'angolo $KCB = CBQ$ (8. lib. 1.). Ma all'angolo KCB è pur eguale l'angolo CBH (4. 21.). Dunque la BQ è sulla direzione della BH .

70. Si vede chiaramente, che quest'ultimo Problema (§. 69.) può molto servire nella pratica per dividere in linee un piede dato, e già diviso in pollici; poichè col metodo di esso essendo BH eguale a dodici pollici, riuscirà BQ eguale ad una dodicesima del primo pollice AB , cioè ad una linea. Nella stessa maniera il metro già diviso in decimetri si potrà suddividere in centimetri. Se sarà già descritta la retta AB , sulla quale si ha a trovare il punto Q ; l'operazione sarà più semplice, poichè senza descrivere col centro C , raggio AB l'arco BQ , basterà tagliare in Q la data retta AB colle aperture di compasso indicate qui sopra.

DELLA GEOMETRIA DEL COMPASSO

LIBRO QUARTO

DELL' ADDIZIONE , E SOTTRAZIONE DELLE DISTANZE ;
DELLA SITUAZIONE DELLE PERPENDICOLARI ,
E DELLE PARALLELE .

71. **L'** Aggiungere , o togliere una distanza da un'altra data , che è così semplice , e facile a farsi col compasso , e colla riga , tirando una retta indefinita pei due estremi della prima distanza , e sopra essa aggiungendo , o togliendo la seconda distanza col compasso (3. lib. 1.) , non è certo così pronta cosa , e spedita a farla col solo compasso ; nè qui si propungono questi Problemi come di grande uso ; ma solo perchè si veggia non poter esserci alcun Problema della Geometria Elementare , che non si possa anche sciogliere col compasso solo nel senso spiegato (§. 1.) , il che si dimostrerà poi più rigorosamente a suo luogo , e perchè non manchi alcuno degli Elementi di questa nuova Geometria giusta la promessa (§. 7.) .

PROBLEMA.

72. **D**alla distanza AB togliere una distanza eguale a CD .

24.

Soluzione. Col raggio CD , e col centro B (se la distanza si vuol togliere da quella parte) si descriva un cerchio $FGEH$. Col centro A , e con qualche raggio si descriva un arco, che tagli il cerchio in E , ed F . Si divida in due l'arco EGF (§. 60.) in G . Sarà il punto G sulla retta BA , e sarà GA il residuo.

Dimostrazione. Avendo i due triangoli EBG , FBG i lati eguali; sarà l'angolo $EBG = FBG$ (8. lib. 1.). Sarà dunque l'angolo EBG eguale alla metà dell'angolo EBF . Avendo pure i lati eguali tra loro i due triangoli EBA , FBA ; si proverà nella stessa maniera, che anche l'angolo EBA è la metà dell'angolo EBF . Dunque l'angolo EBG è eguale ad EBA . Dunque il punto G è sulla BA . Ma è anche BG eguale alla CD . Dunque GA sarà il residuo della AB tolta la CD .

PROBLEMA.

73. **A**lla distanza AB aggiungere la distanza CD in linea retta.

24

Soluzione. Col centro B (se l'aggiunta si vuol fare da quella parte), e col raggio CD si descriva il cerchio $FGEH$. Col centro A , e con qualche raggio si descriva un arco, che tagli il cerchio in E , ed F . Si divida in due l'arco EHF in I (§. 60.). Sarà il punto H sulla retta AB ; e sarà AH la somma delle due distanze AB , CD .

Dimostrazione. Per l'egualianza de' lati tra loro ne' due triangoli EBH , FBH , così pure ne' due triangoli EBA , FBA si troverà (8. lib. 1.) l'angolo $EBH = FBH$, e l'angolo $EBA = FBA$. Dunque $EBH + EBA = FBH + FBA$. Ma la somma di tutti questi quattro angoli è eguale a quattro retti (13. lib. 1.). Dunque la loro metà, per esempio $EBH + EBA$, sarà eguale a due retti, e quindi la HBA sarà una retta (14. lib. 1.). E' poi $BH = CD$. Dunque $AH = AB + CD$.

PROBLEMA.

74. Sulla AB da B verso A collocare la Fig. CD maggiore della AB .

Soluzione. Col centro B , e col raggio CD si descriva un arco indefinito LMN , ovvero un cerchio intero. Col centro A , e con un raggio arbitrario si descriva un arco, che tagli il primo ne' due punti L , ed N . Si divida in due parti eguali l'arco LN (§. 60.) in M . Sarà la BM la stessa CD posta a quel luogo, che si voleva.

Dimostrazione. Col metodo delle dimostrazioni de' due Problemi precedenti (§§. 72., e 73.) si troverà, che essendo l'angolo $LMA = NMA$ (8. lib. 1.) $= \frac{1}{2} LMN$; così pure $LMB = NMB = \frac{1}{2} LMN$; sarà $LMA = LMB$, e quindi BAM retta. E' poi anche eguale a CD . Dunque ec.

Avvertimento.

75. Se l'arco descritto col centro A tagliasse ad angoli troppo acuti l'arco descritto col centro B ; il che succede, quando AB è troppo piccola per rap-

porto a CD ; alla BA si aggiunga l'eguale AE in linea retta, e l'arco LMN descritto col centro B si tagli con un arco descritto col centro E in L , ed M . Se anche in tal caso gli angoli de' due archi riuscissero troppo acuti; si triplichi, si quadruplichi, ec. (§. 65.) la retta BA da B verso A , fino a che l'ultimo suo punto preso per centro del secondo arco dia gli angoli d'intersezione in L , ed M più vicini all'angolo retto. Si faccia lo stesso in casi simili pei §§. 72., e 73.

PROBLEMA.

76. **D**ati i due punti A , e B ; trovare un punto H tale, che la retta BH sia perpendicolare alla AB in B , ed eguale ad una data CD .

Soluzione. Col centro B , e colla distanza CD per raggio si descriva un cerchio FEG . Col centro A , e colla distanza AB per raggio si descriva un arco, che tagli il cerchio in F , ed E . Si determini la semicirconferenza FEG (§. 64.). Si divida in due egualmente l'arco GE in H (§. 60.). Sarà H il punto cercato.

Dimostrazione. Per la simiglianza de' due triangoli GEB , EBA (§. 22.) sarà l'angolo $GEB = EBA$, e quindi GE parallela a BA (28. lib. 1.). Ma BH , che divide in due egualmente l'angolo GBE , è perpendicolare alla corda GE (9. 11. 12. lib. 1.). Dunque anche alla BA (28. lib. 1.). Ma è in oltre $BH = CD$. Dunque H è il punto cercato.

Se la AB fosse troppo minore della CD ; si duplichi, o si triplichi cc. (§. 64. 65.).

PROBLEMA.

77. **D**ati i due punti A , e B ; trovare un punto D in guisa, che la DA sia perpendicolare alla AB .

Soluzione. Preso un raggio arbitrario (per esempio la stessa AB); con esso, e coi due centri A , e B si descrivano due archi, che si taglino in C . Con questo stesso raggio, e col centro C si descriva la semicirconferenza BAD (§. 64.). Sarà D il punto cercato.

Dimostrazione. L'angolo DAB è nel semicirchio, Dunque è retto (31. lib. 3.).

PROBLEMA.

78. **D**ati i due estremi d'una retta AB ,
 Fig. e un punto D fuori di essa; trovare
 28. un altro punto E , che determini la po-
 sizione della DE perpendicolare alla
 AB , e il punto M , dove la taglia.

Soluzione. Si faccia $AD = AE$, e
 $BD = BE$ (§. 11.). Sarà E il primo
 punto cercato. Si divida DE per metà
 in M (§. 66.). Sarà M il secondo.

Dimostrazione. Resta dimostrata questa Solu-
 zione dal §. 14.

PROBLEMA.

79. **T**rovare due punti di una retta, che
 Fig. sia perpendicolare al mezzo della DE .
 28.

Soluzione. Preso un raggio arbitrario, si
 faccia a questo $= DA = EA$. Preso
 lo stesso raggio, o un altro arbitrario, si
 faccia a questo dall'altra parte $= DB$
 $= EB$. Saranno A , e B i due punti
 cercati.

Dimostrazione. Resta dimostrata questa Solu-
 zione dal §. 14.

PROBLEMA.

80. **D**ati due punti A, e B d'una retta,
 Fig. e un punto C fuori di essa, pel quale
 29. si voglia condurre una parallela alla
 AB; trovare un altro punto D, che
 ne determini la posizione.

Soluzione. Si faccia a $CA = BD$ (§. 11.);
 $BA = CD$. Sarà D il punto cercato.

Dimostrazione. Nei due triangoli CDB, CAB,
 che hanno i tre lati eguali fra loro, l'an-
 golo DCB è uguale all'angolo CBA (8.
 lib. 1.). Dunque CD è parallela ad AB
 (28. lib. 1.).

PROBLEMA.

81. **D**ati due punti A, e B d'una retta,
 Fig. e un punto C fuori di essa; collocare a
 30. questo punto C una distanza CE; co-
 sicchè la retta CE sia parallela alla AB,
 e sia eguale ad una data MN.

Soluzione. Trovato un punto D della
 parallela, che passa per C col metodo
 del Problema precedente (§. 80.), sulla

direzione di questa CD si ponga la MN sottraendola ad essa, se è minore (§. 72.), o aggiungendola dall'altra parte (§. 73.), o collocandola sopra essa da C verso D , se è maggiore (§. 74), secondochè richiederanno le condizioni del Problema.

Questa Soluzione non ha bisogno di dimostrazione.

PROBLEMA.

82. **E**saminare se i tre punti A, B, C sono in linea retta.

Fig.
31.

Soluzione. Coi centri A , e C , e con un raggio arbitrario, per esempio AC , si segnino due archi, che si tagliano in D , ed E . Si offervi, se sia $DB = EB$. Se ciò è; i tre punti A, B, C sono in linea retta. Altrimenti no.

Dimostrazione. Se è anche $DB = EB$, sarà l'angolo $DAB = EAB = \frac{1}{2}DAE$ (8. lib. 1.), a cagione dei lati eguali tra loro ne' due triangoli DAB, EAB . Ma nei triangoli DAC, EAC per la stessa cagione

sono eguali gli angoli DAC , EAC , e però eguali ciascuno alla metà dell'angolo DAE . Dunque sarà $\text{DAB} = \text{DAC}$; e quindi i tre punti A , B , C in linea retta. Se poi DB sia maggiore, o minore di EB ; anche l'angolo DAB sarà maggiore, o minore dell'angolo EAB (25. lib. 1.), e quindi non potrà essere eguale all'angolo DAC , non potendo essere eguale alla metà dell'angolo DAE . Dunque i tre punti A , B , C non potranno essere in linea retta.

PROBLEMA.

83. **D**ati tre punti A , B , D esaminare se la DA sia perpendicolare ad AB .

Fig.

31.

Soluzione. Si duplichi la AB in BE (§. 64.) per via del semicircolo BPQE . Si osservi se sia $\text{DB} = \text{DE}$. Se lo è, l'angolo DAB è retto. Altrimenti non lo è.

Dimostrazione. Essendo retta la BAE diametro del cerchio; la DA farà con essa due angoli, la somma de' quali sarà eguale a due retti (13. lib. 1.). Ne' due triangoli poi DAE , DAB , che hanno i lati AE , AB eguali fra loro, e il lato AD comune, se

il lato DE sarà eguale al lato DB ; anche l'angolo DAE sarà eguale all'angolo DAB (8. lib. 1.), e però entrambi retti. Se poi DE sarà maggiore, o minore di DB ; anche l'angolo DAE sarà maggiore, o minore dell'angolo DAB ; quindi uno sarà acuto, e l'altro ottuso (25. lib. 1.).

PROBLEMA.

84. **E**saminare se la retta, che passa per due punti dati D, F sia perpendicolare alla retta, che passa per altri due punti dati A, B .

Fig.
33.

Soluzione. Per via del punto D si trovi la perpendicolare DE alla AB (§. 78.). Si esamini, se i tre punti D, E, F sono in linea retta (§. 82.). Se sì; la DF è perpendicolare alla AB ; altrimenti no.

Dimostrazione. Poichè la DE è perpendicolare per costruzione; se lo è anche la DF , sarà la stessa retta; poichè da un punto D ad una retta AB non si possono condurre due perpendicolari (Coroll. Prop. 32. lib. 1.).

PROBLEMA.

85. **D**ati due punti A, B d'una retta,
Fig. e due C, D d'un'altra; esaminare se
34 sieno parallele.

Soluzione. Si faccia ad $AD = AE$; a
 $BD = BE$ (§. 11.). Si faccia pure
ad $AC = AF$, a $BC = BF$. Si
osservi, se sia $DE = CF$; se ciò è;
saranno parallele; se no; convergeran-
no dalla parte della minore.

Dimostrazione. Le DE, CF sono perpendi-
colari alla AB , e sono tagliate per metà da
essa in due punti M, N (§. 14.).
Dunque sono duple rispettivamente delle di-
stanze DM, CN dei punti D, C dalla
retta AB . Se dunque saranno eguali, le di-
stanze saranno eguali, e quindi le AB, DC
parallele; altrimenti convergeranno.



DELLA GEOMETRIA DEL COMPASSO

LIBRO QUINTO

DELLE DISTANZE PROPORZIONALI.

PROBLEMA.

86. **T**rovare una terza proporzionale
fig. alle due distanze Qp , MN , delle quali
55 la prima Qp è maggiore della seconda
 MN .

Soluzione. Col centro Q , e col raggio
 Qp si descriva un arco indefinito
 ApB . Col centro p , e col raggio
 MN si descriva la semicirconferenza
 $BA S$. Sarà AS la terza proporzionale.

Dimostrazione. Pel Lemma del §. 22. sarà
 $AS.pQ = (Ap)^2$. Dunque $AS.pQ =$
(MN)². Quindi (17. lib. 6.) $pQ :$
 $MN :: MN : AS$.

PRO-

PROBLEMA.

87. **T**rovare una terza proporzionale alle
 Fig. due distanze Qp , MN , delle quali la
 36. prima è minore della seconda, ma però
 maggiore della metà di quella.

Avvertimento.

S' accorgeremo, che la Qp sia maggiore della metà della MN , se i due cerchi descritti coi centri Q , e p , che sono gli estremi della prima distanza, e coi raggi Qp , ed MN , che sono le due distanze date, si taglino tra loro come nella Figura.

Soluzione. È la stessa, che la precedente applicata alla Fig. 36.

Dimostrazione. È la stessa, che la precedente.

88. Se il circolo pbQ' descritto col centro
 Fig. Q , e col raggio Qp non si taglia in
 37. alcun punto col circolo descritto col
 centro p , e col raggio MN , come
 nella Fig. 37.; servirà il Problema se-
 guente.

PROBLEMA.

89. **T**rovare una terza proporzionale alle
Fig. due distanze Qp , MN , delle quali la
37. prima è minore della metà della se-
conda.

Soluzione. Col centro p , raggio MN si
descriva un arco indefinito BAS . Col
centro Q , raggio Qp si descriva la
semicirconfenza pbQ' (§. 64.). Col
centro Q' , raggio $Q'p$ si descriva un
arco indefinito. Se quest'arco taglia
l'arco BAS in due punti B , ed A ;
si determini la semicirconfenza BAS'
(§. 64.). Col metodo dello stesso
§. 64. alla AS' si aggiunga in linea
retta un'eguale $S'S$. Sarà AS la terza
proporzionale cercata.

Dimostrazione. Si ha (§. 22.) $AS' \cdot pQ' =$
 $(Ap)' = (MN)'$. Ma $pQ' = 2pQ$.
Dunque $2AS' \cdot pQ = (MN)'$; ossia
 $AS \cdot pQ = (MN)'$. Quindi (17. lib. 1.)
 $pQ : MN :: MN : AS$.

90. Se nemmeno l'arco pcQ'' descritto col cen-
Fig. tro Q' , e col raggio $Q'p$ tagliasse l'arco BAS
38. descritto col centro p , e col raggio MN ;

si determini la semicirconferenza $p \in Q''$; col centro Q'' , e col raggio $Q''p$ si descriva un arco indefinito. Se questo taglia l'arco BAS in due punti A , e B ; si determini la semicirconferenza BAS' (§. 64.). Si quadruplichi AS' (§. 65.), e sia $AS = 4 AS'$. Sarà questa la terza proporzionale cercata.

Dimostrazione. Poichè si ha (§. 22.) $AS' \cdot pQ'' = (Ap)'' = (MN)''$. Quindi $4 AS' \cdot pQ = (MN)'' = AS \cdot pQ$. Quindi (§. 17. lib. 6.) $pQ : MN :: MN : AS$.

91. Nella stessa guisa si procederebbe oltre, se nemmeno la distanza $Q''p$ fosse maggiore della metà della MN ; cioè si prenderebbe una distanza dopla di essa, e ottupla di Qp , e si ottuplicherebbe la AS' , che ne venisse determinata. Quella distanza ottupla della AS' sarebbe la terza proporzionale cercata, e così via via.

La dimostrazione è come le precedenti.

92. Anche nel caso che la prima distanza Qp fosse bensì maggiore della metà della seconda MN , ma di poco, gioverà duplicarla, perchè le intersezioni de' due cerchi si facciano ad angoli non tanto acuti, ma più vicini al retto (§. 9.).

PROBLEMA.

93. **T**rovare la quarta proporzionale alle
Fig. tre distanze PQ , RS , TV .
39.

Soluzione. Con un medesimo centro O , e colle due prime distanze prese per raggi si descrivano due cerchj, cioè col raggio PQ il cerchio BC , e col raggio RS il cerchio DE . Colla terza distanza TV presa per raggio, e fatto centro in qualche punto B della prima circonferenza, si segni un arco, che la tagli in C . Con un raggio arbitrario fatto centro in B si segni un arco, che tagli la seconda circonferenza in D . Collo stesso raggio BD fatto centro in C si tagli la stessa circonferenza in un prossimo punto E . Sarà DE la quarta proporzionale.

Dimostrazione. A cagione dei lati eguali tra loro nei due triangoli COE , BOD si avrà l'angolo $COE = BOD$ (8. lib. 1.). E tolto da entrambi (o aggiunto) l'angolo BOE , si avrà l'angolo $COB = EOD$. Sarà dunque anche la somma degli angoli OCB , OBC eguale alla somma degli angoli

OED, ODE (31. lib. 1.), Ma i due triangoli COB, EOD sono isosceli. Saranno dunque le due semisomme, ossia gli angoli alla base, eguali (5. lib. 1.). Quindi i triangoli saranno simili (4. lib. 6.), e si avrà $CO : DO :: CB : DE$; ossia $PQ : RS :: TV : DE$.

Avvertimento I.

94. Gioverà prendere il raggio arbitrario BD in guisa, che l'angolo BDO riesca vicino al retto (§. 9.), il che si può fare ad occhio.

Avvertimento II.

95. Se la terza distanza TV non si potesse collocare come corda in BC, il che avverrà, quando la TV sarà maggiore di due volte la PQ; converrà duplicare le due distanze PQ, RS (§. 64.), e con esse così duplicate descrivere i due cerchi BC, DE, e fare tutto il resto come sopra (§. 93.). Se ciò nemmeno bastasse; converrebbe triplicarle ec. Gioverà pure duplicarle, o triplicarle ec., quando la TV si potesse

bensi applicare per corda al primo cerchio, ma ella fosse quasi eguale al diametro di quello; e ciò per ischivare le sezioni ad angoli acuti, e ottenerne delle altre più vicine all'angolo retto.

Ciò resta dimostrato dall'essere $PQ : RS :: 2 PQ : 2 RS :: 3 PQ : 3 RS$ ec. Quindi avendosi fatto come $2 PQ$, a $2 RS$, ovvero come $3 PQ$, a $3 RS$ ec. così BC , a DE , sarà sempre come PQ ad RS ; così BC a DE ; cioè come PQ ad RS , così TV a DE (4. lib. 5.).

PROBLEMA.

96. **D**ividere la MN in P in parti proporzionali alle due distanze date PQ ,
90 RS .

Soluzione. Alla PQ si aggiunga in linea retta la QV eguale alla RS (§. 73.). Alle tre PV , MN , PQ si trovi la quarta proporzionale (§. 93.), la quale si collochi sulla MN in MP , il che si fa sottraendola dalla MN (§. 72.). Sarà fatto.

Dimostrazione. Essendo $PV : MN :: PQ : MP$,
 sarà ancora $PV : MN :: QV : PN$ (5.
 lib. 5.). Sarà dunque $PQ : MP :: QV : PN$.
 Quindi (16. lib. 5.) $PQ : QV :: MP : PN$;
 ossia $PQ : RS :: MP : PN$. A

PROBLEMA.

97. **D**ividere la AB in estrema, e media
 Fig. ragione.

41.

Soluzione. Col centro A , raggio AB si
 descriva il cerchio BDd . Si faccia nella
 sua circonferenza ad $AB = BC =$
 $CD = DE = Ed$. Si faccia a BD
 $= Ba = Ea$. Si faccia ad $Aa = Db$
 $= db$. Sarà la AB divisa in b in
 estrema, e media ragione, e si avrà
 $BA : Ab :: Ab : bB$.

Dimostrazione. Vedi il §. 46.

98. Anche quest' ultimo Problema (§. 97.) è uno
 di quelli, i quali si sciolgono molto più
 semplicemente col solo compasso, che col
 compasso, e colla riga insieme, come si può
 vedere confrontando questa Soluzione colle
 Soluzioni Geometriche conosciute. La Dimo-
 strazione tuttavia riesce più complicata.

PROBLEMA.

99. Tra le due distanze date AB , e CD
Fig. trovare la media proporzionale.

A2.

Soluzione. Sulla AB si aggiunga ad essa la CD da B in H (§. 73.). Si divida per metà la AH in F (§. 66.). Alla BF si aggiunga in linea retta l'eguale Bf (§. 64.). Coi centri F, f , e col raggio FA si descrivano due cerchi, che si taglino in M . Sarà BM la media proporzionale.

Dimostrazione. Essendo i punti f, B, F sulla stessa retta HA , ed essendo eguali rispettivamente i lati dei due triangoli MBf, MBF , sarà l'angolo $MBf = MBF$ (8. lib. 1.), e però entrambi retti (13. lib. 1.). Sarà dunque la MB perpendicolare al diametro HA del semicerchio HMA . Quindi (13. lib. 6.) $AB : BM :: BM : BH$, ossia $AB : BM :: BM : CD$.



DELLA GEOMETRIA DEL COMPASSO

LIBRO SESTO

DELLE RADICI.

PROBLEMA.

100. **T**rovare facilmente le radici dei
Fig. numeri interi dall'uno fino al dieci,
43. prendendo per unità la distanza AB .

Soluzione. Col raggio AB si descriva il cerchio BDd ; si faccia nella sua circonferenza ad $AB = BC = CD = DE = Ed = dc$. Coi centri B , ed E , e col raggio BD si segnino degli archi, che si taglino in a , ed a . Collo stesso raggio BD , e coi centri D , e d si segnino due archi, che si taglino in V . Col raggio Aa , e col centro B si tagli la circonferenza in F . Coi centri

B, ed F, e col raggio AB si segnino due archi, che si taglino in T. Si avrà

$$\begin{array}{l|l}
 AB = \sqrt{1} & aV = \sqrt{6} \\
 Aa = \sqrt{2} & CV = \sqrt{7} \\
 BD = \sqrt{3} & aa = \sqrt{8} \\
 BE = \sqrt{4} & BV = \sqrt{9} \\
 ET = \sqrt{5} & TV = \sqrt{10}
 \end{array}$$

Dimostrazione. Si è dimostrato essere $(Aa)^2 = 2$ (§. 27.). Dunque $Aa = \sqrt{2}$. Si è dimostrato essere $BD = \sqrt{3}$ (§. 2.). Si ha poi $BE = 2 = \sqrt{4}$.

Avendo poi i due triangoli BTA, TAF; l'angolo BTA = TAF (§. 8. lib. 1.). Quindi BT parallela ad FA (§. 18. lib. 1.), e però anche la BT si troverà perpendicolare a BA, come la FA (§. 27.) (27. lib. 1.). Avendo poi il punto A, e il punto E la stessa distanza dai punti D, e d, così pure il punto B, e il punto V; saranno i quattro punti B, A, E, V sulla stessa retta (§. 13.), e sarà $EV = BA$ (§. 14.). Sarà dunque $(ET)^2 = (TB)^2 + (BE)^2$ (47. lib. 1.) = $(AB)^2 + 4(AB)^2 = 5$; quindi $ET = \sqrt{5}$. Intessamente $(aV)^2 = (Aa)^2 + (AV)^2$. Ma essendo $EV = BA$; è ancora $AV = BE = 2AB$; quindi $(AV)^2 = 4(AB)^2 = 4$; ed è $(Aa)^2 = 2$ (§. 27.). Dunque $(aV)^2 = 6$;

ed $aV = \sqrt{6}$. Confrontando poi i punti C, B, c, A, V coi punti A, p, B, P, Q della Fig. 3., e fatte le sostituzioni nell'equazione $(AQ)^2 = (Ap)^2 + pQ \cdot PQ$ (§. 18.), si otterrà $(CV)^2 = (CB)^2 + BV \cdot AV = 1 + 3 \cdot 2 = 7$. Quindi $CV = \sqrt{7}$. Essendo pure $Aa = Ax$ (§. 14.); sarà $(ax)^2 = 4(Aa)^2 = 8$. Quindi $ax = \sqrt{8}$. Si ha poi $BV = 3 = \sqrt{9}$. Finalmente essendo $(TV)^2 = (TB)^2 + (BV)^2 = 1 + 9 = 10$; si ha $TV = \sqrt{10}$.

PROBLEMA.

101. Per via delle radici trovate nel Problema precedente trovare le altre radici de' numeri interi dal 10 fino al 36.

Soluzione. Si sottragga il numero, del quale si vuole la radice dal numero quadrato prossimamente maggiore, che sarà il 16, o il 25, o il 36. Colla radice del residuo, la quale si troverà nella lista del §. 100. presa per raggio, e con un centro A si descriva la semicirconferenza QLR (§. 64.). Colla radice del numero quadrato prossimamente maggiore presa per raggio, la

qualè si troverà col metodo del §. 65., e coi centri Q, ed R si descrivano due archi, che si taglino in P. Sarà AP la radice cercata.

Per esempio si voglia la radice del 29. Sottratto quello dal 36, lascia di residuo 7. Col raggio $CV = \sqrt{7}$ (§. 100.) descritta la semicirconferenza QLR, e coi centri Q ed R, e col raggio $= 6$ segnati due archi, che si taglino in P; sarà $AP = \sqrt{29}$.

Dimostrazione. Essendo retto l'angolo PAQ (§. 81.); sarà $(PQ)^2 = (AQ)^2 + (AP)^2$ (47. lib. 1.). Quindi togliendo $(AQ)^2$, si avrà $(PQ)^2 - (AQ)^2 = (AP)^2$. Ora posto $(PQ)^2 = 36$, e $(AQ)^2$ eguale successivamente ai numeri interi dall'unità fino al 10, si avrà $(AP)^2$ eguale successivamente dal 36 in giù fino al 25. Dunque per AP si avranno successivamente le radici di questi numeri. La radice poi di 25 è 5, e si ha dal §. 65. Posto $(PQ)^2 = 25$, si avranno collo stesso metodo le radici dal 25 in giù fino al 16, e posto $(PQ)^2 = 16$, si avranno le altre dal 16 in giù fino al 10. Nell'esempio addotto si avrà $(PQ)^2 - (AQ)^2 = 36 - 7 = (AP)^2 = 29$. Quindi $AP = \sqrt{29}$.

PROBLEMA.

102. **T**rovare le radici di tutti i numeri interi.

Soluzione. E' chiaro, che adoperando lo stesso metodo del §. 101. colle radici acquistate con esso si potranno avere altre radici di numeri superiori, e con queste altre, e così successivamente fino in infinito. Abbiamo già dunque il modo di ottenere le radici di tutti i numeri interi.

PROBLEMA.

103. **T**rovare la radice di qualunque numero rotto.

Soluzione. Si trovi la radice del denominatore (§. 102.), poi quella del numeratore. Si faccia come la prima radice alla seconda, così l'unità ad una quarta proporzionale (§. 93.). Sarà questa la radice cercata.

Dimostrazione. Poichè se il denominatore sia d ; il numeratore sia n ; se si farà $\sqrt{d} : \sqrt{n} :: 1 : x$; quarta proporzionale; sarà questa quarta $= \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{d}}$. Ma $\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{d}} = \sqrt{\frac{n}{d}}$. Dunque ec.

PROBLEMA.

104. **T**rovare facilmente le metà delle radici dei numeri interi dall'uno fino al 45. venticinque.

Soluzione. Preso il raggio AB eguale ad uno, col centro A si descriva il cerchio BDd , e nella sua circonferenza si faccia ad $AB = BC = CD = DE = Ed$.

Col centro B , e col raggio BD si descriva un arco, che passi pei punti a, N, D, d, n, a .

Collo stesso raggio, e col centro E si descriva un arco, che passi pei punti a, M, C, m, a .

Col raggio Aa , e col centro B si descriva un arco, che passi pei punti M, F, Q, q, m .

Collo stesso raggio, e col centro E si descriva un arco, che passi per punti N, F, P, p, n.

Col raggio AB, e col centro B si descriva un arco, che passi per P, e p.

Collo stesso raggio, e col centro E si descriva un arco, che passi per Q, e q.

Collo stesso raggio, e col centro P si descriva un arco, che passi per R, e tagli la circonferenza in S; col centro p si segni un altro arco, che tagli il primo in R, e la circonferenza in s.

Collo stesso raggio, e coi centri Q, q si descrivan due archi, che si taglino in T, e taglin la circonferenza in O, ed o.

Collo stesso raggio, e col centro a si tagli con un arco la circonferenza in g. Col centro R si tagli con un arco la circonferenza in L, ed l. Coi centri O, ed o si segnino due archi, che si taglino in H. Coi centri H, e T si segnino due archi, che si taglino in V, ed v. Sarà

$$\begin{aligned}
 RA &= \frac{1}{2}\sqrt{1} \\
 RQ &= \frac{1}{2}\sqrt{2} \\
 RD &= \frac{1}{2}\sqrt{3} \\
 RP &= \frac{1}{2}\sqrt{4} \\
 RF &= \frac{1}{2}\sqrt{5} \\
 AM &= \frac{1}{2}\sqrt{6} \\
 Qq &= \frac{1}{2}\sqrt{7} \\
 Aa &= \frac{1}{2}\sqrt{8} \\
 BR &= \frac{1}{2}\sqrt{9} \\
 BL &= \frac{1}{2}\sqrt{10} \\
 pS &= \frac{1}{2}\sqrt{11} \\
 BD &= \frac{1}{2}\sqrt{12}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 HF &= \frac{1}{2}\sqrt{13} \\
 EO &= \frac{1}{2}\sqrt{14} \\
 LI &= \frac{1}{2}\sqrt{15} \\
 BE &= \frac{1}{2}\sqrt{16} \\
 Ha &= \frac{1}{2}\sqrt{17} \\
 HN &= \frac{1}{2}\sqrt{18} \\
 HD &= \frac{1}{2}\sqrt{19} \\
 ag &= \frac{1}{2}\sqrt{20} \\
 dV &= \frac{1}{2}\sqrt{21} \\
 HS &= \frac{1}{2}\sqrt{22} \\
 Mm &= \frac{1}{2}\sqrt{23} \\
 Mn &= \frac{1}{2}\sqrt{24}
 \end{aligned}$$

$$HE = \frac{1}{2}\sqrt{25}.$$

Dimostrazione. Se si confrontino i punti P, B, p, R, E di questa Figura coi punti A, p, B, P, Q della Fig. 3. per mezzo dell'equazione del §. 18. $(AQ)^2 = (Ap)^2 + pQ \cdot PQ$, si otterrà l'equazione per questa Figura $(PE)^2 = (PB)^2 + BE \cdot RE$; ossia $(Aa)^2 = (AB)^2 + 2AB \cdot RE$; ossia (§. 27.) $2 = 1 + 2RE$. Quindi $RE = \frac{1}{2}AE$, e poichè R è sulla stessa retta BAE (§. 13.), sarà anche $RA = \frac{1}{2}AE = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{1}$.

Essendo il punto T alla metà della AB per la stessa ragione, colla quale si è dimostrato, che il punto R è alla metà della AE; sarà

AT

$AT = RE$, quindi confrontandosi i punti di questa Fig. 45. Q, T, q, E, R coi punti A, q, B, Q, P della Fig. 3., il punto A della Fig. 45. sarà il punto p della Fig. 3. Dunque dall'equazione del §. 16. $(AQ)^2 = (AP)^2 + (PQ)^2 + 1^{\circ} p \cdot PQ$ si ricaverà per questa Fig. 45. l'equazione $(QE)^2 = (RQ)^2 + (RE)^2 + AR \cdot RE$; ossia sostituendo i valori numerici $1 = (RQ)^2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$. Quindi $(RQ)^2 = \frac{1}{2} \cdot 2$; $RQ = \frac{1}{2}\sqrt{2}$. Confrontando i punti D, A, d, E di questa Figura 45. coi punti P, A, p, B della Fig. 3., resterà dimostrato dal §. 14., che le due AE, Dd si tagliano vicendevolmente in due parti eguali. Ma la AE è tagliata in due parti eguali in R ; dunque anche la Dd . Ma $Dd = BD = \sqrt{3}$ (§. 2.). Dunque $RD = \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

Si ritenga, che la DRd è anche perpendicolare alla AE (§. 14.).

Si ha poi $RP = 1$. Dunque $RP = \frac{1}{2}\sqrt{4}$.

Essendo retto l'angolo FAR (§. 27.); si ha $(RF)^2 = (FA)^2 + (AR)^2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.

Dunque $RF = \frac{1}{2}\sqrt{5}$.

Essendo la base BAE del triangolo BME tagliata per metà dalla retta AM ; si avrà pel §. 16. $(BM)^2 + (EM)^2 = 2(AB)^2 + 2(AM)^2$; cioè $(Aa)^2 + (Bu)^2 = 2(AB)^2 + 2(AM)^2$; cioè $2 + 3 = 2 + 2(AM)^2$. Quindi $6 = 4(AM)^2$; $\sqrt{6} = 2AM$; $AM = \frac{1}{2}\sqrt{6}$.

Essendosi confrontati qui sopra i punti Q, T, g, E, R, A di questa Fig. 45. coi punti A, g, B, Q, P, p della Fig. 3., risulterà dal §. 13. essere in questa Fig. 45. $AQ = Ag = QR = Rg$. Per le stesse ragioni risulterà essere eguali tra loro, ed a queste quattro le quattro AP, Ap, PT, Tp. Avendo dunque i due triangoli isosceli PTA, QAR tutti i lati eguali tra loro; sarà l'angolo $PAT = QRA$ (8. lib. 1.), ed essendo TAR retta, sarà PA parallela a QR (29. lib. 1.). Quindi anche PQ eguale, e parallela alla AR (33. lib. 1.).

Ma Qg è perpendicolare alla AR (§. 14.). Dunque anche alla PQ (17. lib. 1.). Si hanno poi nei due triangoli PAT, RAq i due angoli PAT, RAq eguali (8. lib. 1.), e TAR retta. Dunque essendo eguali a due retti i due angoli PAT, PAR (13. lib. 1.), lo saranno anche i due PAR, RAq. Quindi sarà retta anche la PAq (14. lib. 1.). Dunque $(Pg)^2 = (ARQ)^2 = (PQ)^2 + (Qg)^2$ (47. lib. 1.); cioè $2 = \frac{1}{4} + (Qg)^2$; quindi $\frac{7}{4} = (Qg)^2$, e $Qg = \frac{1}{2}\sqrt{7}$.

Si ha poi $(Aa)^2 = 2$ (§. 27.) $= \frac{1}{4}$. Quindi

$$Aa = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{8}.$$

Si ha pure $BR = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{9}$.

Se si confrontino i punti B, L, R, I, A di questa Figura 45. coi punti Q, A, p, B, P

della Fig. 3.; dall'equazione $(AQ)^2 = (AP)^2 + (PQ)^2 + PP \cdot PQ$ del §. 16. si ricaverà l'equazione per questa Figura 45. $(BL)^2 = (LA)^2 + (AB)^2 + AR \cdot AB$; ossia $(BL)^2 = 1 + 2 + \frac{1}{2} = \frac{9}{2}$. Quindi $BL = \frac{3}{2}\sqrt{2}$.

I due triangoli PSA , PBA hanno i lati rispettivamente eguali. Dunque si ha l'angolo $SPA = PAB$ (8. lib. 1.). Quindi sono parallele le PS , BA (28. lib. 1.). Ma la PP taglia ad angoli retti la BR (§. 14.). Dunque sarà perpendicolare anche alla PS (27. lib. 1.). Nella stessa maniera poi, che si è dimostrato essere $(Qq)^2 = \frac{7}{2}$, si dimostrerà pure essere $(Pp)^2 = \frac{7}{2}$. Quindi avendosi $(pS)^2 = (Pp)^2 + (PS)^2$ (47. lib. 1.); si avrà $(pS)^2 = \frac{7}{2} + 1 = \frac{9}{2}$; quindi $pS = \frac{3}{2}\sqrt{2}$.

Si ha poi $(BD)^2 = 3$ (§. 2.) $= \frac{12}{4}$. Quindi $BD = \frac{1}{2}\sqrt{12}$.

Si ha pure $(HF)^2 = (HA)^2 + (AF)^2$; e dimostrandosi la QO parallela alla BE nella stessa guisa, che si è dimostrato della PS ; saranno i punti O , P , Q , S nella stessa retta, e $PO = QO - PQ = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = PQ$. Essendo dunque OP eguale, e parallela tanto alla TA , quanto alla TB ; saranno eguali, e parallele anche le OT , PA ; e le due OB , PT fra loro (33. lib. 1.). Ma si è dimostrato quì sopra essere $PT = PA$. Dun-

que sarà anche a queste $\equiv OT \equiv OB$. Per la stessa ragione dall'altra parte le OT , OB saranno eguali alla $PA \equiv PA$. Se ora si confrontino i punti O, o, A, T, B, H coi punti A, B, Q, P, p, q della Fig. 3., si ricaverà dal §. 14. essere $HB \equiv AT \equiv \frac{2}{3}$. Sarà dunque $(HA)' \equiv (\frac{1}{3})' \equiv \frac{2}{3}$; quindi $(HF)' \equiv \frac{2}{3} + 1 \equiv \frac{5}{3}$, e $HF \equiv \frac{2}{3} \sqrt{13}$.

Se si confrontino i punti E, O, H, o, A coi punti Q, A, p, B, P della Fig. 3.; dall'equazione $(AQ)' \equiv (AP)' + (PQ)' + Pp \cdot PQ$ del §. 16., si ricaverà per questa Figura $(EO)' \equiv (OA)' + (AE)' + HA \cdot AE \equiv 1 + 1 + \frac{1}{3} \equiv \frac{7}{3} \equiv \frac{14}{6}$. Quindi $EO \equiv \frac{1}{3} \sqrt{14}$.

In seguito se si confrontino i punti A, R, L, Q, q, l di questa Fig. 45. coi punti A, B, Q, P, p, q della Fig. 3., avendosi (§. 15.) l'equazione per la Fig. 3. $(QM)' \equiv (AQ)' - (AM)'$, e moltiplicando per 4, $4(QM)' \equiv 4(AQ)' - 4(AM)'$, ossia $(Qq)' \equiv 4(AQ)' - (AB)'$; si ricaverà per quella Figura 45. $(Li)' \equiv 4(AL)' - (AR)'$ $\equiv 4 - \frac{1}{4} \equiv \frac{15}{4}$, quindi risulta $Li \equiv \frac{1}{4} \sqrt{15}$.

Si ha poi $BE \equiv 2 \equiv \frac{1}{4} \cdot 4 \equiv \frac{1}{4} \sqrt{16}$.

Per l'angolo retto aAH (§. 27.) si ha $(Ha)' \equiv (HA)' + (Aa)' \equiv (\frac{1}{3})' + 2 \equiv \frac{7}{3}$; quindi $Ha \equiv \frac{2}{3} \sqrt{17}$.

Dimostrandosi nella stessa guisa essere $(AN)' \equiv \frac{1}{3}$, come si è dimostrato di $(AM)'$; così pure $(An)' \equiv \frac{1}{3}$; a cagione che NR taglia per metà la base AE del triangolo ANE .

si avrà (§. 16.) $(AN)^2 + (NE)^2 = 2(AR)^2 + 2(RN)^2$; cioè $\frac{1}{2} + 2 = \frac{3}{2} + 2(RN)^2$; e riducendo si trova $(RN)^2 = \frac{1}{2} = (AN)^2$. Egualmente si trova $(Rn)^2 = \frac{1}{2}$. Se ora si confrontano i punti H, N, R, n, A di quella Figura 45. coi punti Q, A, p, B, P della Fig. 3.; dall'equazione $(AQ)^2 = (AP)^2 + (PQ)^2 + Pp \cdot PQ$ del §. 16., si ricaverà per la Figura 45. l'equazione $(HN)^2 = (AN)^2 + (AH)^2 + AR \cdot AH$, cioè $(HN)^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$. Quindi risulta $HN = \frac{1}{2}\sqrt{18}$.

Essendo la DR perpendicolare alla AE, cioè alla HR; sarà $(HD)^2 = (HR)^2 + (RD)^2$ (47. lib. 1.) $= 4 + \frac{1}{2} = \frac{9}{2}$; quindi $HD = \frac{3}{2}\sqrt{19}$.

Essendo la base aAa del triangolo agα tagliata per mezzo dalla retta gA; si avrà (§. 16.) $(ag)^2 + (αg)^2 = 2(Aa)^2 + 2(Ag)^2$; ossia $(ag)^2 + 1 = 4 + 2$; e $(ag)^2 = 5 = \frac{25}{5}$; quindi $ag = \frac{5}{2}\sqrt{10}$.

Essendo i due triangoli HTV, AED di lati eguali tra loro; quindi l'angolo VTH = DEA (8. lib. 1.), ed essendo i punti H, T, A, E sulla stessa retta; sarà la VT parallela alla sua eguale DE (29. lib. 1.), quindi anche la VD parallela, ed eguale alla TE (33. lib. 1.). Ma la Dd è perpendicolare alla AE, cioè alla TE; dunque anche alla VD (27. lib. 1.). Quindi

$$(dV)^2 = (VD)^2 + (Dd)^2 = (TE)^2 + (BD)^2 = \left(\frac{1}{4}\right)^2 + 3 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1;$$

Quindi $dV = 1 \sqrt{21}$.

Essendosi dimostrata la PS eguale, e parallela alla AE; così la ps per la stessa ragione; sarà anche la SE eguale, e parallela alla AP (33. lib. 1.); così la sE alla Ap. Per l'eguaglianza, e parallelismo delle tre PS, TR, ps si proverà itteffamente l'eguaglianza delle RS. Rs alle PT, pT entrambe dimostrate eguali alla AP = RQ. Confrontando ora i punti H, S, E, s, R di questa Figura coi punti Q, A, p, B, P della Fig. 3., dall'equazione $(AQ)^2 = (Ap)^2 + pQ \cdot PQ$ (§. 18.) si ricaverà per questa Figura 45. $(HS)^2 = (SE)^2 + EH \cdot RH = (RQ)^2 + EH \cdot RH = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot 2 = \frac{3}{2}$. Quindi $HS = \frac{1}{2} \sqrt{22}$.

Essendo la base AE del triangolo AME divisa per metà dalla MR, si avrà (§. 26.) $(AM)^2 + (EM)^2 = 2(RA)^2 + 2(RM)^2$; cioè $\frac{1}{4} + 3 = \frac{1}{4} + 2(RM)^2$. Quindi riducendo risulta $(RM)^2 = 2 = (BM)^2 = (Bm)^2$; del qual valore si dimostra nella stessa guisa essere $(Rm)^2$. Quindi $BM = MR = Rm = mB$. Se ora si confrontano i quattro punti B, M, R, m di questa Figura coi quattro punti A, Q, B, q della Figura 3.; avendosi dal §. 15. $(QM)^2 = (AQ)^2 - (AM)^2$, e quindi $4(QM)^2 = 4(AQ)^2 - 4(AM)^2$, cioè $(Qq)^2 = 4(AQ)^2 - (AB)^2$;

si avrà per questa Figura 45. $(Mm)^2 = 4(BM)^2 - (BR)^2 = 8 - (\frac{1}{2})^2 = \frac{31}{4} = \frac{31}{4}$; quindi $Mm = \frac{1}{2}\sqrt{31}$.

Essendo i triangoli BME, BnE di lati eguali tra loro, ed avendo entrambi la base comune BE divisa in due egualmente dalle AM, An; dall'equazione del §. 26. risulterà lo stesso valore per le due AM, An. Avendo dunque i triangoli BAM, EAn i lati tra loro eguali, sarà l'angolo BAM = EAn (3. lib. 1.). Quindi a cagione della retta BAE essendo la somma dei due angoli MAB, MAE eguale a due retti (13. lib. 1.), sostituendo all'angolo MAB il suo eguale EAn, sarà anche la somma dei due angoli MAE, EAn eguale a due retti. Quindi le due MA, An faranno una sola retta (14. lib. 1.). Sarà dunque $(Mn)^2 = 4(AM)^2 = \frac{31}{4}$. Quindi $Mn = \frac{1}{2}\sqrt{31}$.

Finalmente $HE = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{25}$.

105. Essendo $\frac{1}{2}\sqrt{n} = \sqrt{\frac{n}{4}}$; per esempio $\frac{1}{2}\sqrt{7} = \sqrt{\frac{7}{4}}$ ec., si avranno facilmente da questo Problema le radici di tutti i quarti dall'un quarto fino al venticinque quarti; il che sarà di uso nella costruzione delle Figure simili, come vedremo.

106. Se si fosse preso il raggio AB = 2;

li sarebbero ottenute tutte queste distanze doppie di valore; quindi avremmo avute le radici intere de' numeri dall'uno fino al venticinque. Si potrebbe però facilmente raddoppiare qualunque di quelle mezze radici, che li volesse, per avere l'intera (§. 64.).

107. La facilità di questa costruzione, che si eseguisce coi soli tre compassi delle tre aperture già osservate (§. 35.)

la prima $= \sqrt{1}$

la terza $= \sqrt{2}$

la seconda $= \sqrt{3}$

coi quali si è già diviso il cerchio in 24 parti eguali, ed ora si sono trovate 23 radici successive dei primi numeri; mostra l'eccellenza della Geometria del Compasso, e quanto possa servire alla perfezione delle Arti.

108. Nella costruzione precedente si ha avuto riguardo ad impiegare più che fosse possibile il primo compasso di apertura $= 1$, col quale si è descritta la circonferenza BDd , il quale conservando l'apertura fondamentale, merita più degli altri fiducia. Così pure non li è voluto impiegare che i tre primi

compassi più rimarcabili (§. 107.).
 Ciò ha fatto, che alcune poche sezioni
 degli archi sono riuscite di angoli al-
 quanto acuti, come quelle dei punti S ,
 s , O , o , e più quelle dei punti L ,
 ed l . Chi volesse avere tutti gli angoli
 d' intersezione più vicini all' angolo ret-
 to, si potrà servire della seguente

Altra costruzione della Figura 45.

109. Trovati come nella Soluzione del §.
 104. i punti M , ed m ; col raggio
 BD , e coi centri M , ed m si descri-
 vano due archi, che si taglino in H .
 Col raggio AB , e col centro H si descri-
 va un arco, che tagli la circonferenza
 in O , ed o . Collo stesso raggio si de-
 terminino le semicirconferenze OEs ,
 oES (§. 64.).
 Col raggio BE , e col centro H si tagli
 la circonferenza in l , ed l .
 Tutti gli altri punti della Figura si tro-
 vino come al §. 104.

Dimostreremo, che i punti, che si trovano
 con questa costruzione, sono gli stessi dell'
 altra.

Essendosi dimostrato (§. 104.), che $BM \equiv MR \equiv Rm \equiv mB$, e che i tre punti B, A, R sono nella stessa retta; essendo anche $MH \equiv ME \equiv mH \equiv mE$ per costruzione; H sarà sulla stessa retta BAR (§. 13.), e si avrà $HB \equiv RE$ (§. 14.). Dunque H sarà lo stesso punto, che nell'altra costruzione. Essendo poi eguali le HO , Ho nelle due costruzioni; anche i punti O, o saranno gli stessi. Se si sottrae l'arco osE dalle due semicirconferenze BsE, oES ; si avranno gli archi residui Bo, ES eguali. Quindi $ES \equiv Bo \equiv BO \equiv AQ \equiv RQ$. Quindi anche il punto S sarà il medesimo che prima. Egualmente lo sarà il punto s . Essendo poi la base HTR del triangolo HLR divisa in due egualmente dalla LT ; si avrà (§. 26.) $(HL)^2 + (LR)^2 \equiv 2(HT)^2 + 2(TL)^2$; cioè $4 + (LR)^2 \equiv 2 + 2(TL)^2$, cioè $2 + (LR)^2 \equiv 2(TL)^2$. Ma essendo ancora la base TR del triangolo TLR divisa per metà in A dalla retta LA ; si avrà (§. 26.) $(TL)^2 + (LR)^2 \equiv 2(TA)^2 + 2(AL)^2$, e duplicando $2(TL)^2 + 2(LR)^2 \equiv 4(TA)^2 + 4(AL)^2 \equiv 1 + 1 \equiv 2$; quindi sottraendo $2(LR)^2$, si ha $2(TL)^2 \equiv 2 - 2(LR)^2$. Ma si è trovato quì sopra $2(TL)^2 \equiv 2 + (LR)^2$. Dunque $2 - 2(LR)^2 \equiv 2 + (LR)^2$. E sottraendo 2 , e aggiungendo $2(LR)^2$; si ha

$3 = 3(LR)^*$; quindi $1 = (LR)^* = (AB)^*$. Sarà dunque $LR = AB$ come nella prima costruzione. Lo stesso si proverà di R . Gli altri punti sono determinati come prima. Dunque tutti i punti della Figura sono gli stessi di prima.



DELLA GEOMETRIA DEL COMPASSO

LIBRO SETTIMO

DELLA INTERSEZIONE DELLE RETTE COGLI
ARCHI DI CERCHIO, E TRA LORO.

PROBLEMA.

Dati due punti L , ed M d'una
Fig. retta, e il centro A col raggio AB
46. d'un arco BCD ; trovate i due punti
 P , e Q , nei quali la LM taglia il
detto arco, se pure lo taglia.

Soluzione. Coi due punti L , ed M dati
nella retta presi per centri, e colle
rispettive loro distanze MA , LA dal
dato centro prese per raggi si descriva-
no due archi, che si taglino in V .
Col centro V , e col dato raggio AB
si descriva un arco indefinito EFG .

Se questo taglia l'arco dato in P , e Q , questi due punti saranno i cercati. Se non lo tagliasse; nemmeno la retta LM taglierebbe l'arco dato.

Dimostrazione. Essendo eguali tra loro le quattro distanze AP , AQ , VP , VQ , e le due tra loro, AM , VM ; i tre punti P , M , Q saranno nella stessa retta (§. 13.). Nella stessa guisa si dimostra, che sono nella stessa retta i tre punti Q , P , L . Dunque la retta LM passa per P , e Q , quando questi punti d'intersezione vi siano.

Fig. 47. Se il cerchio EFG descritto col raggio AB , e col centro V non tagliasse il cerchio BCD ; la LM non taglierebbe questo stesso cerchio. Poichè se si concepisca la retta VA , che tagli i cerchi in C , ed F ; divisa per metà la CF in m ; sarà $Vm = mA$. Dunque la LM taglierà perpendicolarmente la VA in m (§. 14.) fuori del cerchio BCD . Se si piglia un qualunque altro punto P nella retta LM ; nel triangolo rettangolo PmA si avrà il lato PA maggiore di mA , perchè opposto ad un angolo maggiore (§. 2., e 18. lib. 1.). Sarà dunque molto più fuori del circolo il punto P del punto m . Dunque in nessun punto la retta LM taglierà il circolo BCD .

PROBLEMA.

III. **D**ato un arco BCD descritto col
Fig. centro A ; trovare i due punti, dove
48. taglia la circonferenza la retta, che passa
per A , e per un altro punto dato L .

Soluzione. Col centro L , e con un raggio
arbitrario LP si descriva un arco, che
tagli l'arco BCD in P , e Q . Si di-
vida l'arco PQ per metà in m (§ 60.).
Si determini la semicirconferenza mDn
(§. 64.). Saranno m , ed n i due punti
cercati.

Dimostrazione. Essendo nella stessa distanza dai
due punti P , e Q i tre punti A , m , ed L ,
saranno nella stessa retta (§. 13.). Ma nella
retta mA si trova anche il punto n estremo
del diametro mn (15. lib. 4.). Dunque ec.

PROBLEMA.

II2. **D**ati due punti A , B d'una retta,
Fig. e due punti C , D d'un'altra; trovare
49. il punto S dove si tagliano.
50.

Soluzione. Coi due punti d'una delle
due rette, per esempio coi punti A , e

Si presi per centri, e colle distanze rispettive di essi punti AC , AD ; BC , BD dai due punti dell'altra retta C , D prese per raggi si descrivano quattro archi, due dei quali si tagliano in C , e c , e due in D , e d .

Si trovi il quarto punto δ del parallelogrammo $CD\delta$ col fare a $Dd = C\delta$; a $DC = d\delta$ (§. 11.).

Si trovi la quarta proporzionale alle tre $c\delta$, CD , Cc .

Con questa presa per raggio, e coi centri C , e c si descrivano due archi, che si taglino in S . Sarà S il punto dell'intersezione delle due rette AB , CD .

Dimostrazione. Le rette AB , Cc saranno perpendicolari una all'altra (§. 13. 14.); così pure le AS , Cc . Dunque il punto S sarà sulla stessa AB . Essendo poi la AB , omnia AS perpendicolare anche alla Dd (§. 13. 14.), sarà la stessa Dd parallela alla Cc (29. lib. 1.). Ma pei lati eguali tra loro nei due triangoli $dC\delta$, dCD si hanno gli angoli $dC\delta$, CdD eguali (8. lib. 1.). Dunque sono parallele anche le due $C\delta$, Dd (23. lib. 1.). Dunque i punti c , C , δ sono nella stessa retta. Ora a cagione dei due lati eguali nei due triangoli CBA , cBA si avranno eguali gli

angoli CBA , eBA (3. lib. 1.). Per la stessa ragione nei triangoli ABD , ABd si trovano eguali gli angoli ABD , ABd . Dunque nella Figura 49. l'angolo eBd , che è la somma dei due eBA , ABd , sarà eguale all'angolo CBD somma dei due CBA , ABD . Nella Figura 50. poi l'angolo eBd , che è la differenza dei due ABd , eBA , sarà pure eguale all'angolo CBD , che è la differenza dei due ABD , CBA . In tutte due le Figure adunque nei due triangoli eBd , CBD , che hanno due lati, e l'angolo compreso eguale, sarà il terzo lato ed eguale al terzo CD (4. lib. 1.). Ma $CD = d\delta$. Dunque il triangolo $ed\delta$ è isoscele. E' poi isoscele anche il triangolo eCS , e si ha la proporzione: la $e\delta$ alla CD , ovvero alla $d\delta$, come la Cc alla CS ; onde viene ancora $e\delta : ed :: eC : eS$. Dunque i due triangoli $e\delta d$, eCS hanno gli angoli eguali tra loro (5. lib. 6.). Quindi essendo l'angolo $e\delta d = eCS$; sarà la CS parallela alla δd (29. lib. 1.), alla quale essendo pur parallela la CD , sarà in essa il punto S . Dunque ec.



DELLA GEOMETRIA DEL COMPASSO

LIBRO OTTAVO

DELLA COSTRUZIONE, E MOLTIPLICAZIONE,
E DIVISIONE DEGLI ANGOLI, E DELLE
LINEE TRIGONOMETRICHE.

Avvertimento.

113. **Q**Uando noi diremo: costruire un
Fig. angolo abc col compasso, s'intende-
remo di dire: trovare col compasso tre
punti a, b, c ; ovvero dato alcuno di
essi trovare gli altri in guisa, che vo-
lendo poi guidare per due di essi a, b
una retta, e per uno di essi due b, c
per terzo c un'altra retta; si abbia un
angolo abc della quantità, che si
vuole. Benchè l'angolo abc non sia
veramente costruito, se non quando si
sono guidate attualmente le rette ab, bc ,

per tirare le quali non può bastare il compasso solo; non ostante per brevità adopereremo spesso la prima frase, intendendosi, che equivalga nel sentimento alla seconda.

PROBLEMA.

114. Essendo dato un angolo ABC per Fig. via dei tre punti A, B, C ; e dati due
51. altri punti b , ed a ; trovare un punto c , cosicchè l'angolo abc sia eguale ad ABC .

Soluzione. Trovata (§. 93.) una quarta proporzionale alle tre distanze AB, ab, BC ; con quella presa per raggio, e col centro b si descriva un arco, che passi per c . Trovata pure una quarta proporzionale alle tre AB, ab, AC , con essa per raggio, e col centro a si descriva un altro arco, che tagli il primo in c . Sarà l'angolo $abc = ABC$.

Dimostrazione. Poichè i due triangoli ABC, abc hanno i lati proporzionali; avranno eguali gli angoli opposti ai lati proporzionali (§. lib. 6.).

115. Servirà adunque la Soluzione del Problema precedente (§. 114.) a sciogliere anche il Problema: Dati i tre punti *A, B, C* estremi agli angoli di un triangolo, e due *a, b* estremi di un altro, trovare il terzo estremo *c* in guisa, che il triangolo *abc* riesca simile al triangolo *ABC*.

PROBLEMA.

116. **D**uplicare, triplicare, quadruplicare Fig. cc. un angolo dato *BAC* (§. 113.).

Soluzione. Col centro *A*, e coi raggi *AB, AC* si descrivano due archi indefiniti *BDF, CE*. Si faccia a *CB = CD*. Sarà l'angolo *BAD* duplo di *BAC*.

Si faccia a *CD = DE*. Sarà l'angolo *BAE* triplo di *BAC*.

Si faccia a *DE = EF*. Sarà *BAF* quadruplo di *BAC* cc.

Per quadruplicarlo si poteva ancora fare a *BD = DF*.

Dimostrazione. Avendo i triangoli BAC , CAD , DAE , EAF ec. tutti i lati rispettivamente eguali; saranno eguali gli angoli BAC , CAD , DAE , EAF ec. (8. lib. 1.). Dunque ec. Quindi essendo l'angolo $BAD = DAF$, sarà anche $BD = DF$ (4. lib. 1.).

PROBLEMA.

117. **E**saminare se l'angolo BAG dato Fig. per via dei tre punti B , A , G sia semiretto.

Soluzione. Col raggio AB , centro A si descriva la semicirconferenza BFE (§. 64.). Si faccia $AG = GF$ (§. 10.). Se sarà $BF = FE$; l'angolo BAG sarà semiretto. Se sarà BF minore, o maggiore di FE ; l'angolo BAG sarà minore, o maggiore di un semiretto.

Dimostrazione. Poichè l'angolo BAF è duplo dell'angolo BAG (§. 116.); se l'angolo BAG è semiretto, sarà retto BAF ; quindi $BF = FE$ (§. 83.). Altrimenti se BAG è minore, o maggiore di un semiretto; sarà BAF minore, o maggiore di un retto; quindi BF minore, o maggiore di FE (24. lib. 1.).

PROBLEMA.

118. **D**ividere per metà l'angolo BAC Fig. dato pei tre soli punti B, A, C , nei quali A è disugualmente lontano da B , e da C .

Soluzione. Col centro A raggio AB sia descritto l'arco BMD . Si faccia a $CB = CD$. Si divida l'arco BMD per metà in M (§. 60.). Si divida l'arco BM per metà in N . Sarà l'angolo BAN la metà dell'angolo BAC .

Dimostrazione. Essendo l'angolo BAD duplo di BAC (§. 116.), e duplo parimente di BAM (33. lib. 6.); sarà l'angolo BAC lo stesso, che BAM . Ma l'angolo BAN è la metà di BAM . Dunque ec.

PROBLEMA.

119. **D**ato l'arco BC descritto col cen-
Fig. tro A ; trovare il suo seno, il coseno,
55. la tangente, e la secante.

Soluzione. Nella circonferenza descritta
col raggio AB si faccia $2 BC = Bc$.
Si divida per metà la Cc in M (§. 66.).
Sarà CM il seno, MA il coseno.

Col centro M , raggio MA si descriva
un arco, che tagli, se può, la circon-
ferenza in D , e d . Si determini la
semicirconferenza $d D A$ (§. 64.). Per
lo stesso §. si aggiunga alla BA la sua
eguale BV . Coi centri A , ed V , e
col raggio DA si descrivano due archi,
che si taglino in S . Sarà BS la tan-
gente, SA la secante.

Dimostrazione. La BA taglia la Cc ad angoli
retti per metà in M (§. 14.). Dunque CM
è il seno, MA è il coseno dell'arco BC .
La SB è perpendicolare alla AB (§. 83.).
La DA è terza proporzionale alle due AM ,
 AC (§. 87.); quindi anche la sua eguale
 AS . Dunque nei due triangoli rettangoli

AMC, ABS si ha la proporzione $AM : AC :: AB : AS$, ed invertendo (4. lib. 5.) $AC : AM :: AS : AB$. Quindi (35. lib. 5.) $(AC)^2 : (AM)^2 :: (AS)^2 : (AB)^2$. E sostituendo ad $(AC)^2$, e ad $(AS)^2$ i loro valori tratti dalla 47. lib. 1., si avrà $(AM)^2 + (MC)^2 : (AM)^2 :: (AB)^2 + (BS)^2 : (AB)^2$. Quindi (17. lib. 5.) $(MC)^2 : (AM)^2 :: (BS)^2 : (AB)^2$. Quindi (34. lib. 5.) $MC : AM :: BS : AB$. Quindi anche i lati MC, BS sono proporzionali. Si avrà dunque l'angolo MCA lo stesso, che BAS (5. lib. 6.). Quindi i punti ACS saranno nella stessa retta, e BS sarà la tangente, ed AS la secante dell'arco BC.

Se il cerchio descritto col centro M raggio MA non tagliasse la circonferenza, o la tagliasse ad angoli troppo acuti, converrebbe ricorrere al §. 89., o al §. 90., e 91.

*Altra Soluzione per aver la tangente,
e la secante.*

Si determini la semicirconferenza BCE Fig. (§. 64.). Col raggio BC, centro E 36. si tagli questa in Q. Col raggio CQ, e coi centri A, e B si segnino due archi, che si taglino in V. Collo stesso rag-

gio CQ centro V si tagli la circonferenza in e . Col raggio Ee , e coi centri A , e B si segnino due archi, che si taglino in m . Collo stesso raggio Ee centro m si descriva la semicirconferenza ABS (§. 64.). Sarà SB la tangente, SA la secante.

Dimostrazione. Se sia l'arco BCF eguale al quadrante $= FE$; per essere $BC = QE$; sarà anche $CF = FQ$. Sarà poi per le definizioni trigonometriche il seno dell'arco CF la stessa cosa, che il coseno dell'arco BC . La corda poi dell'arco CFQ doppia dell'arco CF sarà doppia del seno dell'arco CF , ossia del coseno dell'arco BC . Questa corda è $CQ = AV$. Si ha poi (§. 31.) $AV.Ee = (AB)^2$. Per essere poi retta la AmS (§. 64.) $= 2Ee$, e $AV = 2\cosen. BC$; si avrà $2Ee.\cosen. BC = (AB)^2 = AS.\cos. BC$. Quindi $\cos. BC : AB :: AB : AS$ (17. lib. 6.). Sarà dunque AS terza proporzionale al coseno, ed al raggio; e però sarà eguale alla secante, secondo le dimostrazioni trigonometriche. E' poi retto l'angolo ABS (31. lib. 3.). Sarà dunque AS la secante nella sua posizione, e quindi BS la tangente.

PROBLEMA.

120. **D**ato il seno mn d'un arco di un
Fig. raggio dato AB ; trovare quell'arco.
56.

Soluzione. Descritto il cerchio CcK col raggio AB , si trovi una dupla della mn (§. 64.). Con essa presa per raggio, e fatto centro in qualche punto C della circonferenza si descriva un arco, che la tagli in c . Si divida l'arco Cc per metà in B (§. 60.). Sarà BC l'arco cercato.

Dimostrazione. Il seno dell'arco BC per la definizione trigonometrica è la metà della corda dell'arco doppio di BC . Dunque cc.

PROBLEMA.

121. **D**ato il coseno ma d'un arco di un
Fig. raggio dato AB ; trovare quell'arco.
57.

Soluzione. Descritto il cerchio CcK col raggio AB si trovi una dupla della ma (§. 64.). l'atto centro in qualche punto c della circonferenza con quella dupla presa per raggio si tagli la circonferenza in K . Si determini la

semicirconferenza KcC (§. 64.). Si divide per metà l'arco Cc in B (§. 60.). Sarà BC l'arco cercato.

Dimostrazione. Sia guidata l'altra corda Cc . Essa sarà divisa per metà in M ad angoli retti dal raggio AB (§. 14.). Ma anche l'angolo CcK è retto (§. 11. lib. 3.), essendo nel semicerchio CcK . Dunque i due triangoli CMA , CcK , che hanno un angolo comune in C , e l'altro retto, sono equiangoli tra loro (§. 12. lib. 1.), e si ha (§. 4. lib. 6.) $CM : Cc :: MA : cK$. Ma CM è la metà di Cc . Dunque $MA = \frac{1}{2}cK = ma$. E' poi MA il coseno dell'arco BC . Dunque cc.

PROBLEMA.

122. **D**ata la tangente ab di un arco di Fig. raggio dato AB ; trovare quest'arco.
55.

Soluzione. Descritto col raggio AB il cerchio BCA ; alla AB si ponga in B perpendicolare la $BS = bs$ (§. 76.). Si trovi il punto C , dove la SA taglia la circonferenza (§. 111.). Sarà BC l'arco cercato.

Questa Soluzione non ha bisogno di dimostrazione.

PROBLEMA.

123. **D**ata la secante sa di un arco di
fig. raggio dato AB ; trovare quest' arco.
55.

Soluzione. Descritta col raggio AB la
circonferenza BCA , e posta sulla AB
l'eguale BV (§. 64.), coi centri A ,
ed V , e col raggio sa si descrivano
due archi, che si taglino in S . Si trovi
il punto C , dove la SA taglia la cir-
conferenza (§. 111.). Sarà BC l'arco
cercato.

Dimostrazione: La SB sarà perpendicolare alla
 BA (§. 33.); dunque sarà la tangente
dell'arco BC , e quindi SA la secante.



DELLA GEOMETRIA DEL COMPASSO

LIBRO NONO

DELLE FIGURE SIMILI, E DEI
POLIGONI REGOLARI.

Avvertimento.

124. **Q**Uando diremo: *costruire una figura, o un poligono*, s'intenderemo di dire: *trovare tutti que' punti, che bastano a determinare la posizione, e la grandezza di quelle rette, che si devono guidare per costruire interamente il poligono.*

PROBLEMA.

125. Sopra un dato lato *ab* costruire un Fig. triangolo simile a un dato triangolo 3^o. *ABC.*

Soluzione. Vedi il §. 115.

PROBLEMA.

126. Costruire una Figura simile ad una Fig. data $ABCEFD$, che abbia un dato rapporto di area con essa.

Soluzione. Si voglia per esempio, che la nuova Figura abbia due quinti di area della Figura data. Con un raggio AB il maggiore, che si possa comodamente, si costruisca la Figura 43. (§. 100.). Presa da essa Figura la $Aa = \sqrt{2}$ per raggio, e fatto centro in O (Fig. 58.), si descriva il cerchio minore, nella di cui circonferenza è il punto v . Presa dalla Figura 43. la $ET = \sqrt{5}$ per raggio, collo stesso centro O si descriva il cerchio maggiore, nella di cui circonferenza è il punto V , il quale si marchi in tal luogo per rapporto al punto v , che la Vv riesca press' a poco tangente al cerchio interno in v .

Si supponga divisa la Figura data in tanti triangoli ABC , ACD , CDE , EDF , immaginandovi delle rette AC , CD &c. Si pongano dei numeri 1, 2, 3, 4, 5 &c. alle distanze AB , AC , BC , CD

ec., che misurano i lati di questi triangoli.

Si applichino queste distanze 1, 2, 3 ec. successivamente come corde a tanti archi successivi del cerchio V , cioè la AB da V in 1; la AC da 1 in 2; la BC da 2 in 3, ec. fino in fine; il che si fa prendendo la distanza AB per raggio, e fatto centro in V tagliando questa stessa circonferenza con un arco in 1, ec.

Colla distanza Vv presa per raggio si faccia centro successivamente nei punti 1, 2, 3, 4, ec., e si descrivano degli archi, che taglino successivamente la circonferenza minore in 1, 2, 3, 4, ec. fino in fine.

Le corde del cerchio interno, ossia le distanze da v ad 1, da 1 a 2, da 2 a 3, da 3 a 4, ec. saranno i lati ab , ac , bc , cd , ec. della nuova Figura, la quale si costruirà triangolo per triangolo. Colla distanza da v in 1 si marcheranno i due punti ab . Coi centri a , e b , e colle distanze seconda, e terza prese dal cerchio interno (la seconda è dall' 1 al 2; la terza dal 2 al 3)

si segneranno due archi, che si taglino in c . Coi centri c , ed a , e colle distanze quarta, e quinta prese dal cerchio interno (la quarta è dal 3 al 4; la quinta dal 4 al 5) si segneranno due archi, che si taglino in d . Nella stessa maniera si troveranno i punti e , ed f , e sarà costruita la Figura.

Dimostrazione. Le corde del cerchio interno stanno alle rispettive corde del cerchio esterno, come sta il raggio Ox al raggio Oy (§. 93.), cioè come V_2 sta a V_5 . Dunque nella stessa ragione stanno tutti i lati dei triangoli della Figura $abcefd$ ai rispettivi lati dei triangoli della Figura $ABCEFD$. Dunque i triangoli delle due Figure sono tra loro equiangoli, e simili (§. lib. 6. def. 1.). Dunque le due stesse Figure poligone sono simili (20. lib. 6.), ed essendo la proporzione, ossia ragione delle aree dei poligoni duplicata della ragione dei lati (ivi); sarà l'area del poligono $abcefd$ all'area $ABCEFD$ come 2 a 5. Sarà dunque l'area della Figura minore eguale a due quinti della maggiore.

Da quest' esempio si vede cosa si dovrà fare, qualunque altro sia il rapporto, nel quale si voglia, che l'area della Figura da costruirsi sia alla data. Si

descrivessero due circonferenze v , ed V , i raggi delle quali staranno tra loro nel rapporto delle radici dei numeri, che formano il rapporto delle aree. Nella circonferenza, che corrisponde alla Figura data, si potranno successivamente per corde i lati dei triangoli, nei quali si suppone divisa la Figura data. Per via di queste col metodo indicato si troveranno delle corde proporzionali nell'altra circonferenza. Quelle saranno i rispettivi lati dei triangoli della nuova Figura.

Il rapporto delle mezze radici, e delle intere essendo lo stesso, servirà in molti casi la Fig. 45. (§. 104.). Per gli altri casi vedi i §§. 101., 102., e 103.

Si sceglie poi un raggio AB , che sia il
 Fig. possibile maggiore comodamente, perchè
 44 i due cerchi sieno meglio capaci delle
 45 grandezze delle corde da applicarvisi,
 e perchè le intersezioni, che ne nascono, faccian angoli più vicini al retto.
 127. Se il rapporto fosse dato tra i lati
 Fig. AB , ed ab di essi tra loro, o di
 56 qualunque altre due rette fra loro; in
 questo rapporto si sceglierebbono i due
 raggi OV , ov , i maggiori possibili.

PROBLEMA.

128. **I**scrivere ad un cerchio dato un poligono regolare tra quelli, che si possono iscrivere ad esso col compasso, e colla riga.

Soluzione. Si divida la circonferenza in un numero di parti eguali al numero de' lati del poligono, che si vuole (§. 27., 29., 30., 31., 32., 38., 40., 41., 42., 53., 57., 60., 63.). I punti della divisione saranno i vertici del poligono regolare cercato (§. 124.), e le corde degli archi saranno i lati.

Dimostrazione. Tutti i lati sono eguali, perchè sono corde di archi eguali. Anche gli angoli sono eguali, poichè essendo alla circonferenza insistono ad un egual numero di archi eguali (21. lib. 3.). Dunque si ha un poligono regolare del numero, che si voleva di lati iscritto al cerchio (Defin. 1. lib. 3.).

129. Essendo 240. le parti (§. 57.), nelle quali con tre punti soli presi fuori della circonferenza si può dividere essa

circonferenza con sei aperture di compasso al più (§. 39.); tanti saranno i poligoni regolari, che con questi tre punti, e sei aperture di compasso si potranno inscrivere al cerchio, quanti sono i diversi numeri, che dividono esattamente il 240. Ora quelli numeri sono i seguenti 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 20, 24, 30, 40, 48, 60, 80, 120, 240. Dunque omettendo il 2, si potrà inscrivere un poligono regolare di 3 lati, di 4 lati, di 5, di 6, di 8, di 10, ec. fino al poligono di 240. lati.

130. Se il numero dei lati del poligono, che si vuole, si trova essere uno di quelli, pei quali si è divisa la circonferenza ai §§. 27., 30., e seguenti, per esempio il 12. si divida la circonferenza in 12. parti eguali §. 31.; i due punti estremi di ciascuna di queste saranno ai vertici degli angoli del poligono, che si vuole inscrivere; ossia, ciò che è lo stesso, le corde di quelli archi saranno i lati del poligono. Se il numero dei lati del poligono, che si vuole, non si trovasse espressamente nei

Problemi del Libro secondo: come per esempio se si volesse costruire un poligono di sessanta lati; si duplichi, si triplichi, o si quadruplichi ec. questo numero, finchè si arrivi ad avere uno dei numeri, che si contengono espressamente nei Problemi; nell'esempio addotto si duplichi il 60, e si avrà 120; il qual numero si trova espressamente al §. 42., dove si dà il modo di dividere la circonferenza in 120 parti eguali. Queste parti prendendole a due a due ci somministreranno 60 archi eguali; le corde dei quali saranno i 60 lati del poligono, che si voleva. Se si avesse dovuto triplicare il numero, come nel caso, che si fosse voluto un poligono di 16 lati; divisa allora la circonferenza in 48 parti (§. 38.) numero triplo del 16, si dovranno prendere tre di questi archi per avere un arco, che sia la sedicesima parte della circonferenza; ognuno di questi archi eguali avrà per corda un lato del poligono di sedici lati, ed angoli.

PROBLEMA.

131. **A**d un cerchio dato $BCDd$ circo-
Fig. scrivere un triangolo equilatero (§. 124).
39.

Soluzione. Si faccia al raggio di questo cerchio $AB = BC = CD$; a $BD = BL = DL = Dd = DN = dN = dM = BM$.

I tre punti L, M, N saranno i vertici del triangolo equilatero circoscritto al cerchio.

Dimostrazione. Il triangolo BDd è equilatero iscritto al cerchio (§. 29. 130.). Ai lati di questo hanno eguali i lati i triangoli DLB, NDd, dBM ; dunque saranno eguali i loro angoli (§. lib. 1.). Perciò i tre angoli NDd, dDB, BDL saranno eguali ai tre angoli del triangolo iscritto, cioè a due retti (§. 32. lib. 1.). Quindi la NDL sarà retta (§. 14. lib. 1.). Lo stesso si dimostrerà delle altre due LBM, NdM . Saranno poi ciascuna di esse dupla del lato BD , dunque eguali tra loro. Dunque il triangolo LMN è equilatero. Essendo poi gli angoli NDd, DLB eguali, sarà la Dd parallela alla LB (§. 29. lib. 1.), ossia alla LM . Ora i punti

N, A, B sono in una retta perpendicolare alla Dd (§. 13. 14.). Dunque la AB è perpendicolare anche alla LM (27. lib. 1.). Dunque la LM è tangente del cerchio (16. lib. 3.). Lo stesso si dimostrerà delle due NL, NM . Dunque il triangolo NLM è equilatero circoscritto al cerchio (Defin. 2. lib. 4.).

PROBLEMA.

132. **A**d un dato cerchio circoscrivere un
Fig. quadrato.
63,

Soluzione. Si divida la sua circonferenza in quattro parti eguali nei punti B, F, E, f (§. 27.). Con questi punti presi per centri, e col raggio AB si segnino degli archi, che si taglino in R, S, T, V . Saranno questi ultimi quattro punti i vertici del quadrato circoscritto al cerchio.

Dimostrazione. L'angolo TBA è retto (§. 100.). Nella stessa guisa si dimostra essere
H 3

retto l'angolo SBA . Dunque TBS è una retta (14. lib. 1.) perpendicolare al diametro BE , e però tangente al cerchio (16. lib. 3.). Lo stesso si dimostra delle altre TFV , VER , RfS . Avendo poi il triangolo BFT i lati eguali rispettivamente ai lati del triangolo BFA ; sarà l'angolo $BTF = BAF$ (8. lib. 1.); quindi retto (§. 27.). Lo stesso si dimostra degli altri angoli V , R , S . Dunque cc.

PROBLEMA.

133. **A**d un dato cerchio circoscrivere un pentagono regolare .

Soluzione. Sia il cerchio BDE descritto Fig. col raggio AB . Si divida la sua circonferenza in cinque parti eguali (§. 40.) nei punti B , C , D , E , F . Fatto centro in uno di questi punti C , col raggio CB si descriva la semicirconferenza BDP (§. 64.). Preso per centro il punto E opposto all'arco CB , col raggio EC si tagli l'arco BDP in p . Col raggio Ep , e coi centri B , C , D , E , F si segnino degli archi, che si taglino in

b, c, d, e, f . Saranno questi ultimi punti i vertici degli angoli del pentagono circoscritto al cerchio.

Per dimostrazione di questo Problema servirà la dimostrazione del seguente

PROBLEMA.

134. **D**ati i vertici d'un qualunque poligono regolare iscritto al cerchio; trovare i vertici d'un simile poligono regolare circoscritto.

Soluzione. Sieno i punti B, C, D, E vertici del poligono iscritto al cerchio. Con uno di essi C preso per centro, e colla distanza di due d'essi CB presa per raggio si descriva la semicirconferenza BDP (§. 64.). Coi centri B , e C , e col raggio BD si segnino due archi, che si taglino in V (Nel caso del pentagono Fig. 61. il punto V coincide col punto E). Con questo stesso raggio BD , e col centro V si tagli la circonferenza BDP in p . Col raggio Pp , e coi centri B, C, D, E ec.

vertici dell' inscritto si descrivano degli archi, che si taglino nei punti b, c, d, e , ec. Questi saranno i vertici del poligono regolare circoscritto.

Dimostrazione. Pel §. 22. si ha $pP.VC = (CD)^2$, cioè $cC.BD = (BC)^2$. Quindi (17. lib. 6.) $BD:BC::BC:cC$. Ma $BC = CD$; e $Be = cC$. Dunque nei due triangoli isosceli BCD, BeC tutti i lati saranno proporzionali. Dunque (5. lib. 6.) sarà l'angolo $cCB = CBD$. Quindi le due cC, BD saranno parallele (28. lib. 1.). Nella stessa guisa si proverà, che alla stessa BD è parallela anche la Cd . Saranno dunque i punti c, C, d nella stessa retta. Ma per essere $BC = CD$, il raggio AC è perpendicolare alla BD (§. 14.). Dunque anche alla cd (29. lib. 1.). Dunque la cd è tangente (16. lib. 3.) alla sua metà in C . Lo stesso si dimostra della $de = cd$ nella sua metà in D , e così dell'altre. Saranno poi queste tante di numero, quanti sono i punti B, C, D, E , ec. Dunque ec. (Defiu. 2. lib. 4.).

PROBLEMA.

135. Sopra un dato lato AE costruire un
Fig. triangolo equilatero.

^{1.} Soluzione. Si trovi il punto D come nel
§. 1. Sarà ADE il triangolo cercato.

PROBLEMA.

136. Sopra un dato lato AB costruire un
quadrato.

Soluzione. Si trovino come al §. 100. i
Fig. due punti F, T . Sarà $ABTF$ il qua-
43. drato cercato.

Dimostrazione. Essendosi ivi dimostrato essere
la BT eguale, e parallela ad FA , e perciò
perpendicolare ad AB ; anche la FT sarà
parallela alla BA (33. lib. 1.). Quindi an-
che gli angoli BTf, AFT saranno retti
(17. lib. 1.), e $ABTF$ un quadrato
(Def. 32. lib. 1.).

PROBLEMA.

137. Sopra un dato lato AB costruire un
Fig. pentagono regolare.

63.

Soluzione I. Col raggio AB centro A si descriva la circonferenza $BCDEd$, e si faccia ad $AB = BC = CD = DE = Ed$. Si faccia a $BD = Ba = Ea$. Si faccia poi ad $Aa = Db = db$. Col centro B raggio BA si descriva l'arco indefinito ACL . In esso si faccia ad $Ab = AH = HK = KI$. Si faccia similmente nella circonferenza BCD ad $Ab = BQ = QP = PN$. Coi centri L , ed N , e col raggio AB si segnino due archi, che si taglino in M . Saranno i punti A, B, L, M, N vertici del pentagono regolare cercato.

Dimostrazione. L'angolo CBF (Fig. 61.) del pentagono regolare $BCDEF$ è misurato dalla metà dell'arco $CDEF$ (20. lib. 3.). Essendo dunque quest'arco eguale a tre quinti della circonferenza; l'angolo CBF del pentagono è misurato da tre decimi. Ora gli archi $AHKL$, $BQPN$, che misurano gli angoli ABL , BAN , sono ciascuno tre de-

cimi della circonferenza (§. 41.). Sono dunque gli angoli ABL , BAN gli angoli del pentagono regolare da costruirsi sopra AB . Sono poi anche i tre lati AB , BL , AN eguali tra loro, cioè lati di esso pentagono. Confrontando dunque i punti L , B , A , N di questa Figura 63. coi punti C , B , F , E della Fig. 61., il triangolo LMN di questa Figura avendo il lati eguali rispettivamente ai lati del triangolo CDE (Fig. 61.), avrà anche gli angoli eguali (8. lib. 1.), e tutto coinciderà. Dunque cc.

Soluzione II. Descritta, come sopra, col raggio AB , centro A la circonferenza BDd , e in essa fatto ad $AB = BC$ Fig. 64. $= CD = DE = Ed$; e fatto a $BD = Ba = Ea$; e fatto ad $Aa = Db = db$; col raggio bE , e col centro A si segni un arco, che passi per L , ed M . Collo stesso raggio bE , e col centro B si tagli quest' arco in M , e la circonferenza in N . Finalmente collo stesso raggio, e col centro N si tagli l'arco LM in L . Saranno i punti A , B , L , M , N vertici del pentagono regolare.

Dimostrazione. Si ha $(BE)^2 = (bE)^2 + (Bb)^2 + 2Bb \cdot bE$ (4. lib. 2.). Essendo poi l'angolo BNE nel semicerchio, si ha (31. lib. 3., 47. lib. 1.) $(BE)^2 = (BN)^2 + (NE)^2$. Confrontando i due valori di $(BE)^2$, nei quali $(bE)^2 = (BN)^2$ risulta $(Bb)^2 + 2Bb \cdot bE = (NE)^2$. Essendo poi $bE = bA + AE = Ab + AB$, si avrà $(Bb)^2 + 2Bb \cdot Ab + 2Bb \cdot AB = (NE)^2$. Ma $2Bb \cdot AB = 2(Ab)^2$ (6. 46.). Dunque $(Bb)^2 + 2Bb \cdot Ab + (Ab)^2 + (Ab)^2 = (NE)^2$. Ma $(Bb)^2 + 2Bb \cdot Ab + (Ab)^2 = (AB)^2$. Dunque $(AB)^2 + (Ab)^2 = (NE)^2$. Sarà dunque NE il lato del pentagono iscritto nel cerchio BDd (6. 50.) (10. lib. 13.); quindi essendo l'arco NE eguale a due decime della circonferenza, sarà l'arco BCN eguale a tre decime, e l'angolo BAN sarà l'angolo del pentagono regolare. Essendo poi la BN sostenuta ai due lati BA , AN del pentagono regolare; sarà essa il lato del triangolo isoscele, che ha per base AB , e ciascuno degli angoli alla base duplo dell'angolo al vertice (11. lib. 4.). Saranno dunque anche i punti L , ed M vertici del pentagono regolare.

PROBLEMA.

138. Sopra un dato lato AB costruire un
Fig. esagono regolare.

65.

Soluzione. Col raggio AB , e coi centri A , e B si segnino due archi, che si taglino in O . Collo stesso raggio, e col centro O si descriva un cerchio, e nella sua circonferenza si faccia $AB = BC = CD = DE = EF$. Sarà $ABCDEF$ l'esagono regolare cercato.

Per la Dimostrazione vedi la 15. lib. 4.

PROBLEMA.

139. Sopra un dato lato AB costruire un
Fig. ottagolo regolare.

66.

Soluzione I. Col raggio AB , e coi centri A , e B si descrivano le due semicirconferenze $BCDE$, $ACde$ (§. 64). Si faccia $aCE = Ea = Ba = Aa = ea$. Col raggio AB centro a si tagli l'arco DE in H . Collo stesso raggio, e centro a si tagli l'arco de in h . Collo stesso

raggio, e coi centri H , ed h si segnino due archi, che passino per G , e g . Col raggio Ba , e coi centri a , ed a si taglino questi archi in g , e G . Col raggio AB , e coi centri G , e g si segnino due archi, che passino per F , ed f . Col raggio Aa , e coi centri a , ed a si taglino questi archi in f , ed F . Saranno i punti A , B , h , g , f , F , G , H i vertici dell'ottagono regolare costruito sul lato AB .

Dimostrazione. I lati AB , Bh , hg , gf , AH , HG , GF sono tutti eguali per costruzione. Ora se si consideri un ottagono regolare inscritto nel cerchio, si troverà, che ognuno de' suoi angoli alla circonferenza ha per base un arco eguale a sei ottavi di essa, e perciò è misurato da tre ottavi (20. lib. 3.). Si ha poi l'arco BCH eguale a tre ottavi (5. 30.). Dunque l'angolo BAH è dell'ottagono. Istessamente lo è l'angolo ABh . Essendo poi le aA , aB perpendicolari alla AB (5. 27.), saranno parallele tra loro (19. lib. 1.). Dunque la Ha , che fa un angolo semiretto colla aA (5. 27.), lo farà ancora colla aB (27. lib. 1.); ma è semiretto anche hBa ; dunque aH è parallela ad hB (18. lib. 1.). Dunque anche ah è

eguale, e parallela alla HB (33. lib. 1.). Quindi l'angolo $hah = hBH$ (34. lib. 1.). Ora l'angolo $hBH = hBE - HBE = hBE - \frac{1}{2}HAE$ (26. lib. 3.). Avrà dunque per misura $\frac{1}{4} - \frac{1}{8}$ della circonferenza, cioè $\frac{1}{8}$ di essa: dunque l'angolo Bha , che insieme coll'angolo hah equivale a due retti (27. lib. 1.), avrà per misura $\frac{1}{4}$ della circonferenza. Essendo poi nei due triangoli ahB , ahg tutti i lati eguali tra loro; sarà l'angolo $ahg = ahB$ (8. lib. 1.). Quindi l'angolo totale ghh avrà per misura $\frac{1}{2}$ della circonferenza, e sarà angolo dell'ottagono. Iteffamente lo sarà l'angolo AHG . Sarà ancora l'angolo $hga = hBa$. Ed avendo pitimente gli angoli eguali tra loro i due triangoli gfa , BaA ; sarà l'angolo $fga = BAa$ (8. lib. 1.). Quindi l'angolo hgf sarà composto di due angoli eguali rispettivamente a due, che compongono l'angolo hBA . Gli sarà dunque eguale, e quindi sarà angolo dell'ottagono. Iteffamente lo sarà l'angolo HGF . Saranno dunque anche i punti f , ed F vertici dell'ottagono come tutti gli altri.

Soluzione II. Col raggio AB , e coi centri A , e B descritte come sopra le due semicirconferenze $BCDE$, $ACde$, e fatto a $CE = Ea = Ba = Aa = ea$;

di nuovo col raggio AB , e col centro a si segni un arco, che tagli l'arco DE in H , e passi per F . Collo stesso raggio, centro α si segni un arco, che tagli l'arco de in h , e passi per f . Col raggio aA , centro a si segni un arco, che passi per f . Collo stesso raggio, centro a si segni un arco, che passi per F . Col raggio AB , e coi centri H , ed F ; h , ed f si segnino degli archi, che si taglino in G , e g .

Dimostrazione. Essendo per la dimostrazione della Soluzione 1. le AB , $a\alpha$ parallele, ed eguali tra loro, come le due aA , αB , che fanno con quelle angoli retti; posto per brevità $AB = 1$; sarà anche $a\alpha = af = aF = 1$. Si ha poi $(Aa)^2 = 1 = (af)^2 = (aF)^2$. Quindi saranno retti gli angoli faa , $Fa\alpha$ (48. lib. 1.), e i punti f , a , B nella stessa retta (14. lib. 1.), e in una stessa parallela i punti F , a , A . Essendo poi anche eguali fa , Fa , sarà fF parallela, ed eguale alla $a\alpha = 1$, ed $Fa\alpha f$ un quadrato. Avendo poi i due triangoli FGa , HGa i lati eguali tra loro, avranno eguali anche gli angoli (8. lib. 1.), e sarà l'angolo $FGa = GaH$; quindi saranno parallele le due GH , Fa , e quindi anche le due FG , aH

(33. lib. 1.). Ma l'angolo FaH esterno al triangolo aHA è eguale ai due opposti interni aHA , aAH (32. lib. 1.), cioè a tre semiretti; è dunque l'angolo $FaH = BAH$; dunque essendo eguali gli angoli opposti nei parallelogrammi (34. lib. 1.), anche $FGH = BAH$. Si ha poi l'angolo $AaH = aHG$, ed AHa è retto; dunque anche l'angolo AHG vale tre semiretti. Parimente l'angolo fFa essendo retto, ed $aFG = aHG$ semiretto, sarà anche l'angolo fFG eguale a tre semiretti. Lo stesso si dimostra degli angoli in f , g , ed h . Essendo dunque tutti i lati, e tutti gli angoli eguali, la Figura sarà un ottagono regolare.

Se si quadruplicano i due membri dell'equazione (§. 15.) $(QM)^2 = (AQ)^2 - (AM)^2$, che appartiene alla Fig. 3., si avrà $4(QM)^2 = 4(AQ)^2 - 4(AM)^2$, cioè $(Qq)^2 = 4(AQ)^2 - (AB)^2$; onde ne viene per ogni rombo il teorema: il quadrato d'una diagonale del rombo equivale a quattro quadrati d'uno de' suoi lati, sottrattone il quadrato dell'altra diagonale. Quindi nel rombo $FaHfG$ si avrà $(aG)^2 = 4(Fa)^2 - (FH)^2$. Ma essendo l'angolo $FGH = HAB$, e i lati, che comprendono questi due angoli eguali; risulta anche $FH = BH$ (4. lib. 1.). Si avrà dunque $(aG)^2 = 4(AB)^2 - (BH)^2 = (BE)^2 - (BiI)^2$. Ma $(BE)^2 = (BH)^2 + (HE)^2$

(31. lib. 3., 47. lib. 1.). Dunque $(aG)' = (HE)'$, e quindi $aG = HE$.

Soluzione III. Col raggio AB , e col Fig. centro A descritta la semicirconferenza
67. $BCDE$ (§. 64.), e fatto $aBD = Ba = Ea$; col raggio AB centro a si segni un arco, che tagli l'arco DE in H , e passi per F . Col raggio aA centro a si segni un arco, che passi per f . Col raggio aB centro a si segni un arco, che passi per g . Col raggio BH centro a si segni un arco, che passi per h . Col raggio HE centro a si segni un arco, che passi per G . Si faccia ad $AB = Bh = hg = gf = fF = FG$. Sarà anche $FG = GH$, ec.

Dimostrazione. I triangoli aAB , aBh , ahg , agf , ec., che hanno il vertice in a , e le basi sui lati della Figura, hanno tutti i loro lati eguali rispettivamente ai lati dei triangoli delle stesse lettere nella Figura 66. (Vedi le due Dimostrazioni antecedenti). Dunque avranno anche gli angoli eguali (3. lib. 1.). Ed essendo similmente posti per ordine; anche gli angoli della Figura, che sono composti degli angoli di questi triangoli presi a due a due, saranno eguali agli angoli dell'altra Figura. Dunque ec.

Soluzione IV. Col raggio AB , e col centro A descritta la semicirconferenza $B C D E$ col fare in essa ad $AB = BC = CD = DE$, e fatto a $BD = Ba = Ea$, e col raggio AB , centro a avendo tagliata la semicirconferenza in H , col raggio EH , e coi centri E , ed A si segnino due archi, che si taglino in P . Collo stesso raggio PA , centro P si tagli la semicirconferenza in Q . Col raggio BQ , e coi centri B , ed H si segnino due archi, che si taglino in O . Ora col centro O , e collo stesso raggio OH si descriva un cerchio, che passerà per A . Nella sua circonferenza si faccia ad $AB = Bh = hg = gf = fF = FG$. Saranno i punti A, B, h, g, f , ec. i vertici dell'ottagono.

Dimostrazione. Essendo $QP = AP = EP$, così pure $QA = AE = AB$, e la AB sulla continuazione della AE (15. lib. 6.), si avrà (5. 22.) $BQ \cdot AP = (AQ)^2$. Quindi $AP : AQ :: AQ : BQ$ (17. lib. 6.), ossia $HE : AE :: AB : BO$. Ma HE è un lato dell'ottagono inscritto al cerchio di raggio AE . Dunque anche AB sarà lato dell'ottagono inscritto al cerchio di raggio BO .

139. Sopra un dato lato AB costruire un
Fig. decagono regolare.

69.

Soluzione. Col centro A , e col raggio AB si descriva il cerchio BDd . Si faccia nella sua circonferenza ad $AB = BC = CD = DE = Ed$. Si faccia a $BD = Ba = Ea$. Si faccia poi ad $Aa = Db = db$. Ora col raggio bE , e coi centri A , e B si descrivano due archi, che si taglino in V . Collo stesso raggio bE , e col centro V si descriva il cerchio $BLMNOPQRSA$, e si faccia ad $AB = BL = LM = MN = NO = OP = PQ = QR = RS$. Il punto S sarà nella sezione delle due circonferenze, e si avranno nei punti A , B , L , M , ec. i dieci vertici del decagono regolare cercato.

Dimostrazione. La bE è un lato del triangolo isoscele, che avendo per base la AB , ha gli angoli alla base ciascuno doppio dell'angolo al vertice (§. 137.). Dunque nel triangolo VAB sarà l'angolo BVA eguale a un quinto di due tetri (32. lib. 1.). Sarà dunque

l'arco BA, che lo misura, eguale ad un decimo della circonferenza, come lo saranno gli altri archi BL, LM, MN, ec. Sarà dunque il poligono ABLMNOPQRS un decagono regolare inscritto al cerchio di centro V, e costruito sul lato AB.

PROBLEMA.

140. Sopra un lato dato AB costruire un
Fig. poligono regolare qualunque tra quel-
69. li, che si possono inscrivere al cerchio
(§. 128.).

Soluzione. Col raggio AB si descriva un cerchio BDd. In esso si iscriva un poligono regolare simile a quello, che si vuole costruire sul lato AB, cioè di un egual numero di lati (§. 128.); e sia BL un lato di questo poligono inscritto. A quello lato BL, e al raggio AB si trovi la terza proportionale (§. 87., 89., 90., 91., 92.). Con essa presa per raggio, e coi centri A, e B si segmino due archi, che si taglino in V. Collo stesso raggio VA, centro V si descriva un cerchio ABLMN, ec., e si faccia ad $AB = BL = LM = MN$, ec.

I punti A, B, L, M, N, ec. saranno i vertici del poligono cercato.

Dimostrazione. Avendo il triangolo B A I i lati proporzionali ai lati del triangolo B V A, sarà l'angolo $B A I = B V A$ (5. lib. 6.). Dunque gli archi B I, B A, che li misurano, saranno porzioni eguali delle loro circonferenze. Dunque ec.

PROBLEMA.

141. Costruire un quadrato interno ad Fig. una data diagonale A B.
70.

Soluzione. Col raggio A B centro A si descriva l'arco B C D E. Collo stesso raggio, e col centro B si descriva l'arco indefinito C P, e si faccia $a B C = C D = D E$. Si faccia poi $a B D = B a = E a$. Ora col raggio A a, e col centro E si tagli l'arco C P in P. Col raggio A P, e coi centri A, e B si segnino due archi, che si taglino in L, ed M. Sarà ALBM il quadrato cercato.

Dimostrazione. Se si supponga per brevità $AB = 1$, sarà $AP = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ (p. 104.) $= AL = BL$. Quindi $(AL)^2 = (BL)^2 = \frac{1}{2}$, ed $(AL)^2 + (BL)^2 = 1 = (AB)^2$. Dunque l'angolo BLA è retto (48. lib. 1.), e semiretti i due angoli eguali tra loro LBA , LAB (5., e 32. lib. 1.). Intellamente si dimostrerà essere retto l'angolo BMA , e semiretti gli angoli MBA , MAB . Dunque saranno retti gli angoli MBL , MAL , ed $ALBM$ sarà il quadrato cercato.



DELLA GEOMETRIA DEL COMPASSO

LIBRO DECIMO

DEI CENTRI.

142. **T**rovare il centro d'un cerchio
Fig. dato M A B.

71.

Soluzione. Fatto centro in qualche punto A della sua circonferenza, con un raggio arbitrario A B, che siesca minore del diametro del cerchio dato, e maggiore del suo quarto, si descriva la semicirconferenza B C D E facendo ad $AB = BC = CD = DE$. Sia M il punto, dove questa taglia la circonferenza del cerchio dato. Col raggio E M, e coi centri E, ed A si segnino due archi, che si taglino in L. Collo stesso raggio L A, e col centro L si tagli il cerchio B M E in Q. Col raggio B Q, e coi centri B, ed A si segnino due archi, che si taglino in O. Sarà O il centro cercato.

Dimostrazione. Essendo la BAE una retta (15. lib. 4.), l'angolo esterno LAB è eguale ai due interni opposti ALE , AEL presi insieme nel triangolo ALE (32. lib. 1.). Ora i triangoli $LA E$, $LA Q$ hanno tutti i lati eguali fra loro; quindi hanno eguali gli angoli opposti ai lati eguali (8. lib. 1.). E' dunque l'angolo $AEL = QAL$, ed $ALE = ALQ$. Dunque l'angolo LAB è eguale ai due presi insieme QAL , e QLA . Fatto via da tutte due le parti l'angolo QAL , resta l'angolo $QAB = QLA$. Sarà dunque nel triangolo LAQ la somma degli altri due angoli LAQ , LQA eguale alla somma dei due angoli AQB , ABQ nel triangolo ABQ (32. lib. 1.). Ma questi due triangoli LAQ , ABQ sono isosceli per costruzione; dunque gli angoli alla loro base saranno eguali alla semisomma (5. lib. 1.), e però eguali nell'uno, e nell'altro triangolo tra loro. Saranno dunque i triangoli LAQ , ABQ simili (4. lib. 6.), e sarà LA ad AQ , come AQ a QB . E sostituendo valori eguali, sarà ME ad EA , come AB ad OB . Dunque i triangoli isosceli MAE , AOB avendo i lati proporzionali sono equiangoli tra loro (5. lib. 6.), ed è l'angolo $OAB = AME = AEM$. Ma l'angolo MAB esterno è eguale ai due interni eguali tra loro presi insieme AME , AEM nel triangolo

AEM (32. lib. 1.). Dunque sarà eguale all'angolo OAB preso due volte; ossia sarà $OAB = OAM$. Ma sono ancora nei due triangoli OAB, OAM eguali tra loro i lati AB, AM, ed il lato OA è comune; cioè i due triangoli hanno un angolo eguale compreso fra lati eguali; dunque (4. lib. 1.) sarà anche il terzo lato OB d'un triangolo eguale al terzo lato OM dell'altro. Dunque le tre OB, OA, OM sono eguali, e però O è il centro, che si cercava del circolo MAB (9. lib. 3.).

143. Qualora s'è trovato il valore della QB terza proporzionale alle due LA, AQ, ossia alle due EM, EA, che è il valore del raggio del cerchio, di cui si cerca il centro, basterà prendere due punti ad arbitrio nella circonferenza del cerchio, e fatto centro in essi, con questo raggio segnare due archi, che si taglino. La loro sezione sarà il centro del cerchio.

144. Sarà utile in pratica, per ottenere sezioni ad angoli meno acuti, scegliere ad occhio un raggio AB, che s'accosti al valore del raggio del cerchio, che si cerca.

PROBLEMA.

145. **A**d un triangolo equilatero dato circoscrivere, ed inscrivere un cerchio.
Fig. 71.

Soluzione. Siano i vertici del triangolo dato A, B, ed M. Col raggio AM, e col centro A si segni l'arco MDE, e si faccia ad $AM = MD = DE$. Col raggio BD, e coi centri B, ed A si segnino due archi, che si taglino in L. Collo stesso raggio LA, e col centro L si tagli l'arco DE in Q. Col raggio QE, e con due vertici del triangolo, per esempio A, e B, presi per centri si segnino due archi, che si taglino in O. Collo stesso raggio OA, e col centro O si descriva un cerchio. Esso sarà circoscritto al triangolo.

Si divida per metà la QE in *m* (§. 66.). Col raggio Q*m*, e collo stesso centro O si descriva un altro cerchio. Esso sarà inscritto al triangolo.

Dimostrazione. Dalla Dimostrazione del §. 142. risulta essere anche qui la QE terza proporzionale alle due EM, EA, essendo anche

quì la BAE una retta. Sarà dunque la QE raggio d'un cerchio, che passa pei tre punti MAB ; e sarà O il centro (§. 143.).

Neila Figura 59., nella quale il cerchio DBd è inserito al triangolo NLM , avendosi la AD perpendicolare ad LD , e la NAB ad LB (§. 131.), i triangoli rettangoli NDA , NBL , che hanno un angolo comune in N , hanno anche il terzo angolo eguale (32. lib. 1.); quindi si ha la proporzione (4. lib. 6.) $NL : LB :: NA : DA$. Ma NL è doppia di LB ; dunque anche NA è doppia di DA , cioè il raggio del cerchio circoscritto al triangolo equilatero è doppio del raggio del cerchio inscritto. Dunque cc.

PROBLEMA.

146. **A**d un quadrato dato circoscrivere, Fig. ed inserire un cerchio.

73.

Soluzione. Sieno i quattro vertici dati del quadrato A, B, T, F . Si faccia ad $AB = AE$. Ad $FB = FE$. Collo stesso raggio BF , e col centro B si segui un arco, che passi per Q , e q . Col centro E , e col raggio EA si tagli quest'arco in Q , e q . Collo stesso raggio AE , e coi centri Q , e q si se-

gnino due archi, che si tagliano in M .
 Col raggio AQ , e coi centri A , e B
 si segnino due archi, che si tagliano in
 O . Collo stesso raggio OB , e col cen-
 tro O si descriva un cerchio. Esso sarà
 circoscritto al quadrato. Collo stesso
 centro O , e col raggio OM si descriva
 un altro cerchio. Esso sarà inscritto al
 quadrato.

Dimostrazione. Se per brevità si suppone AB
 $\equiv 1$, si avrà $AQ \equiv \frac{1}{2}\sqrt{2}$ (§. 104.) \equiv
 $AO \equiv BO$. Sarà dunque $(AO)^2 + (BO)^2$
 $\equiv 1 \equiv (AB)^2$. Quindi sarà retto l'angolo
 BOA (48. lib. 1.), e semiretti gli angoli
 OAB , OBA (5., e 32. lib. 1.). Essendo
 poi retto l'angolo BAF del quadrato, sarà
 semiretto l'angolo OAF . Dunque nei due
 triangoli BAO , FAO si avrà un angolo
 eguale compreso fra lati eguali tra loro.
 Quindi sarà anche $OB \equiv OF$ (4. lib. 1.).
 Nella stessa maniera si dimostra essere anche
 $OB \equiv OT$. Dunque il cerchio $ABTF$ è
 circoscritto al quadrato.

La OM è perpendicolare alla MA (§. 83.).
 Dunque la BMA è tangente al cerchio de-
 scritto col raggio OM . Lo stesso si dimostra
 degli altri lati AF , FT , TB . Dunque il
 cerchio descritto col raggio OM , e col cen-
 tro O è inscritto al quadrato.

PROBLEMA.

147. **A**d un qualunque poligono regolare
fig. circoscrivere, e inscrivere un cerchio.
74

Sieno B, A, M tre vertici di questo poligono regolare, dei quali quello di mezzo A sia egualmente lontano dagli altri due B , ed M . Fatto centro in A , col raggio AB si descriva la semicirconferenza BCE (§. 64.). Col raggio ME , e coi centri A , ed E si segnino due archi, che si taglino in L . Col centro L , e collo stesso raggio LA si tagli la semicirconferenza BCE in Q . La BQ sarà il raggio del cerchio circoscritto. E però presi per centri due vertici del poligono, per esempio B , ed A , e col raggio BQ segnati due archi, che si taglino in O ; sarà O il centro.

Se AB è un lato del poligono, si divida per metà in T (§. 66.). Sarà OT il raggio del cerchio inscritto, che si descriverà col medesimo centro O . Se fosse qualunque altro Ab uno de' lati del po-

ligono, si divida per metà Ab in c . Sarà Or il raggio del cerchio da inscriverti col medesimo centro O .

Dimostrazione. Che O sia il centro del cerchio, che passa per tre punti B, A, M , risulta dalla Dimostrazione del §. 14. Dunque è centro del cerchio circoscritto, poichè per tre punti B, A, M non si può far passare, che un cerchio (25. lib. 3.).

E' poi OT perpendicolare alla TA (§. 83.). Quindi la TA sarà tangente al cerchio descritto col raggio OT , e col centro O (16. lib. 1.). Lo stesso si dimostra di tutti gli altri lati eguali ad AB . Dunque questo cerchio è inscritto al poligono, che ha per lato AB . Insestamente si dimostra, che il cerchio descritto col raggio Or , e col centro O è inscritto al poligono, che ha per lato Ab .

148. Se AB è lato del poligono, nel quale si vuole iscrivere il cerchio, ci saranno molte maniere di dividerlo per metà (§. 66.). Pel quadrato abbiamo assegnato la più semplice (§. 146.). Pel triangolo solo (§. 145.) il raggio del cerchio inscritto è la metà del raggio del circoscritto. Nel solo quadrato è eguale alla metà del lato.

149. **T**rovare il centro S d'un cerchio, Fig. che passi per tre punti dati PQR .
75.

Soluzione. Fatto centro in P , e Q , con un raggio arbitrario si segnino due archi, che si taglino in A , e B . Fatto centro in Q , ed R , si segnino pure con un raggio arbitrario due archi, che si taglino in C , e D . Si trovi il punto S , dove le due AB , CD si tagliano (§. 112.). Sarà S il centro cercato.

Dimostrazione. Vedi la 25. lib. 3.



DELLA GEOMETRIA DEL COMPASSO

LIBRO UNDECIMO.

PROBLEMI VARIJ.

PROBLEMA.

150. **D**ata una scala SL , trovare l'area
Fig. del campo triangolare ABD , e del cam-
76. po quadrilatero $ABCD$.

Soluzione. Si faccia $a BA = Ba$; a $DA = Da$ (§. 11.). Si portino sulla scala SL le distanze Aa , e Bd prese sul compasso, e si trovi essere per esempio $Aa = 7$, $Bd = 8$. Si moltiplichino tra loro questi due numeri, e si pigli il quarto del prodotto $= 14$. Questo numero esprimerà l'area del triangolo ABD .
Se si voglia l'area del campo quadrilatero $ABCD$, trovato, come qui sopra, il punto a , si faccia $a BC = Bc$, a $DC = Dc$. Si trovino sulla scala le due di-

istanze Aa , Cc , e sia per esempio $Aa = 7$, $Cc = 5$. Per la loro somma $= 12$ si moltiplichi la BD trovata sulla scala per esempio $= 8$. Del prodotto 96 si pigli la quarta parte 24. Questo numero esprimerà l'area del quadrilatero $ABCD$.

Dimostrazione. La Aa è doppia della perpendicolare, che da A cade sopra la BD (§. 14.). Ma l'area del triangolo ABD è eguale alla metà dell'area d'un parallelogrammo, che ha per base la BD , e per altezza questa perpendicolare (41. lib. 1.). Dunque è eguale alla quarta parte del prodotto della Aa nella BD . Egualmente l'area del triangolo BCD è eguale alla quarta parte del prodotto della Cc nella BD . Dunque l'area del quadrilatero $ABCD$ è eguale alla quarta parte del prodotto della somma delle due parallele Aa , Cc nella loro perpendicolare BD .

151. Può servire questo Problema a misurare l'area di tutto un Disegno di un campo poligono, ripartendolo in tanti quadrilateri, e triangoli coll'immaginarvi delle linee rette. Si potrebbero proporre anche altre maniere di ridurlo in trapezj, ma queste si possono, quando giovi, raccogliere facilmente dal metodo, col quale si è sciolto questo Problema.

PROBLEMA.

152. **D**ati i piani triangolari, che contengono una piramide tetraedra; trovare nella sua base il punto, nel quale cade la perpendicolare dal vertice; e trovare la sua altezza.

Soluzione. Sia il triangolo ABC la base di quella piramide tetraedra, e sieno AEC , BDC , AFB i piani triangolari, che vanno al suo vertice.

Col centro C , e col raggio $CD = CE$ si descriva un arco, che passi per c , e d .

Col centro B , e col raggio BD si descriva un arco, che tagli il primo in d . Col centro A , e col raggio AE si segni un arco, che tagli il primo in e .

Si trovi il punto P , dove si tagliano le due rette Dd , Ee (§. 112.). Sarà questo il punto, dove cade la perpendicolare dal vertice della piramide.

Si divida per metà la CE in m (§. 66.). Col raggio mC , centro m si descriva la semicirconferenza CpE . Si faccia a $CP = Cp$. Sarà Ep l'altezza della piramide.

I. dimostrazione. Se nella piramide $SABC$, che Fig. 72 per base il triangolo ABC , e per vertice S , si guidi nel triangolo SCB la retta Sd perpendicolare a CB , e nel piano della base ACB dal punto d si alzi la perpendicolare ed ; sarà in essa il punto P , in cui cade la perpendicolare SP dal vertice (11. lib. 11.). Idessamente se dal punto S nel piano SAC si guidi ad AC la perpendicolare Se , e da e nel piano della base ACB si guidi la perpendicolare ee' alla stessa AC ; sarà in essa il punto P . Sarà dunque quello la sezione delle due rette Sd , Se . Ma nella Figura 77., nella quale i punti D , ed E rappresentano il punto S della Figura 78., la Dd è perpendicolare alla BC in un punto d (§. 14.); così pure la Ee è perpendicolare alla AC in un punto e . Dunque il punto P è il cercato.

Essendo poi i due triangoli CPS Fig. 78., CpE Fig. 77. rettangoli in P , e p , il primo per supposizione, e il secondo per la 31. lib. 3., ed essendo CS la stessa CE , e la $CP = Cp$; sarà ancora $PS = pE$. Poichè (Fig. 78.) $(CS)^2 - (CP)^2 = (PS)^2$ (47. lib. 1.). Ugualmente (Fig. 77.) $(CE)^2 - (Cp)^2 = (pE)^2$. Ma $(CS)^2 - (CP)^2 = (CE)^2 - (Cp)^2$. Dunque $(PS)^2 = (pE)^2$. Quindi $PS = pE$. E' dunque pE l'altezza della piramide.

153. Fiu quì nelle Dimostrazioni non si siamo

dipartiti dagl' Elementi di Euclide. Ma poichè in seguito ciò non si potrebbe più fare ogni volta senza troppa prolissità: porremo quì io sussidio alcune equazioni, che si trovano dimostrate in tutti i trattati di Trigonometria Piana.

154. Se in un cerchio descritto col raggio ± 1 sieno x , ed y due archi qualunque; si avrà
 $\text{sen.}(x+y) = \text{sen. } x \cdot \cos. y + \cos. x \cdot \text{sen. } y$
 $\text{sen.}(x-y) = \text{sen. } x \cdot \cos. y - \cos. x \cdot \text{sen. } y$
 $\cos.(x+y) = \cos. x \cdot \cos. y - \text{sen. } x \cdot \text{sen. } y$
 $\cos.(x-y) = \cos. x \cdot \cos. y + \text{sen. } x \cdot \text{sen. } y$

155. Se nella terza di quelle equazioni si ponga $x = y$; si avrà
 $\cos. 2x = (\cos. x)^2 - (\text{sen. } x)^2$.
 E poichè $(\cos. x)^2 + (\text{sen. } x)^2 = 1$, e quindi $(\cos. x)^2 = 1 - (\text{sen. } x)^2$; ne verrà $\cos. 2x = 1 - 2(\text{sen. } x)^2$, e quindi
 $(\text{sen. } x)^2 = \frac{1 - \cos. 2x}{2}$; e finalmente

$$\text{sen. } x = \sqrt{\frac{1 - \cos. 2x}{2}}.$$

156. Se si sommano la prima, e la seconda delle equazioni del §. 154., ne verrà
 $\text{sen.}(x+y) + \text{sen.}(x-y) = 2 \text{sen. } x \cdot \cos. y$,
 e quindi

$$\text{sen. } x \cdot \cos. y = \frac{\text{sen.}(x+y) + \text{sen.}(x-y)}{2}.$$

- Se si faccia $x+y = p$, $x-y = q$; si avrà
 $\text{K } 3$

$2x = p + q$; $2y = p - q$; quindi

$$\text{sen. } p + \text{sen. } q = 2 \text{ sen. } \frac{p+q}{2} \cdot \cos. \frac{p-q}{2}.$$

157. Se si sommano la terza, e la quarta delle equazioni del §. 154., ne verrà

$$\cos. x \cdot \cos. y = \frac{\cos. (x+y) + \cos. (x-y)}{2},$$

$$\text{e quindi } \cos. p + \cos. q = 2 \cos. \frac{p+q}{2} \cos. \frac{p-q}{2}.$$

158. Se si sottrae la terza dalla quarta delle predette equazioni, ne verrà

$$\text{sen. } x \cdot \text{sen. } y = \frac{\cos. (x-y) - \cos. (x+y)}{2},$$

$$\text{e quindi } \cos. q - \cos. p = 2 \text{ sen. } \frac{p+q}{2} \cdot \text{sen. } \frac{p-q}{2}.$$

159. Essendo $2 \text{ sen. } x = \text{corda. } 2x$; sarà

$$(\S. 155.) \text{ corda. } 2x = 2 \sqrt{\frac{1 - \cos. 2x}{2}},$$

e posto x in luogo di $2x$, si avrà

$$\text{corda. } x = 2 \sqrt{\frac{1 - \cos. x}{2}} = \sqrt{(2 - 2 \cos. x)}.$$

Se si chiami k la corda, e il coseno, s il seno, k' la corda del complemento al quadrante; si avrà $k^2 = 1 - 2c$

$$k'^2 = 2 - 2s.$$

Dalla prima di queste due equazioni si avrà $c = 1 - \frac{1}{2}k^2$, ed essendo $s = \sqrt{(1 - c^2)} = \sqrt{(k'^2 - \frac{1}{4}k^4)} = k' \sqrt{(1 - \frac{1}{4}k^2)}$; si avrà $k^2 = 2 - 2k' \sqrt{(1 - \frac{1}{4}k^2)}$.

PROBLEMA.

160. **I**n un dato triangolo equilatero ABC
Fig. inscrivere un quadrato $ebcd$ (§. 124.).
79.

Soluzione I. Se vorremo servirsi dei lati
dati del triangolo, col centro A , e col
raggio AB si descriva il semicerchio
 $BCDE$ (§. 64.).

Col centro E , e col raggio EC si de-
scriva un arco, che tagli il dato lato
 AB in b . Col centro A , e col raggio
 Bb si descriva un arco, che tagli lo
stesso lato in e . Coi centri e , e b , e
col raggio eb si descrivano due archi,
che taglino i lati AC in d , e CB in
 c . Sarà $ebcd$ il quadrato iscritto.

Dimostrazione. Posto per brevità $AB = 1$, sarà
 $Eb = EC = BD = \sqrt{3}$ (§. 2.); quindi
 $Bb = BE - Eb = 2 - \sqrt{3} = Ae$; quindi
 $be = AB - 2Ae = 2\sqrt{3} - 3 = (2 - \sqrt{3})\sqrt{3}$
 $= bc$. Sarà dunque $Bb : bc :: (2 - \sqrt{3}) :$
 $(2 - \sqrt{3})\sqrt{3} :: 1 : \sqrt{3}$.

Ma se si suppone che la AB sia tagliata per
metà in T dalla perpendicolare CT ; sarà
pure $BT : TC :: \frac{1}{2} : \frac{1}{2}\sqrt{3}$ (§. 104.);
cioè $B'T : TC :: 1 : \sqrt{3}$. Dunque la bc

è parallela alla TC (2. lib. 6.), e quindi perpendicolare alla AB (27. lib. 1.). Lo stesso si dimostrerà della de . Dunque $ehcd$ è il quadrato inscritto.

Soluzione II. Se poi non si volessimo servire della intersezione dei lati dati del triangolo ABC ; ma solamente dati i tre punti ellittici A , B , e C del triangolo si dovessero trovare i quattro punti b , c , d , e del quadrato da inscrivervi;

Col centro E , come prima, e col raggio EC si segni un arco, che passi per b , C , ed a . Collo stesso raggio, e col centro B si segni un arco, che tagli l'antecedente in a .

Col raggio AB , e col centro a si tagli la semicirconferenza $BCDE$ in H . Si faccia in essa $Ha = Hb = HK$.

Col raggio aK , e col centro D si descriva un arco, che passi per b . Sarà determinato il punto b .

Col raggio Bb , e col centro A si guidi un arco per e . Col raggio Cb , e col centro C si guidi un altro arco, che tagli l'ultimo in e . Col raggio be , e coi centri e , e C si segnino due archi,

che si tagliano in d . Collo stesso raggio be , e coi centri b , e C si segnano due archi, che si tagliano in e . Sarà $bede$ il quadrato cercato.

Ovvero compito il cerchio $BCDEA$, e fatto ad $AB = EA$; col raggio aK determinato come quì sopra, e coi centri D , e A si descrivano due archi, che si tagliano in b . Il resto si faccia come sopra.

Dimostrazione. Il punto K si sarà quì determinato come nella Figura 9. (§. 31.) per via del medesimo punto a , sicchè l'arco BK sarà una venticquattresima parte della circonferenza. Ora nella Figura 9. essendo $BK = Bk = EM$; se si confrontino i punti a , K , B , k , A , M coi punti Q , A , R , S , p , B della Figura 4.; dall'equazione $(AQ)^2 = (RQ)^2 - AS \cdot pQ$ (§. 20.) risulterà per la Figura 9. l'equazione $(aK)^2 = (Ba)^2 - Kk \cdot Aa$. Ora Kk è corda d'una dodicesima parte della circonferenza. Per trovare il suo valore, supponendo per brevità $AB = 1$, si ha il seno di $BN = Kk = AX$ (Fig. 12.) $= \frac{1}{2}$, e il doppio del suo coseno, cioè $2NX = NO = BD = \sqrt{3}$; quindi se nell'equazione (§. 159.) corda. $x = \sqrt{(2 - 2 \cos. x)}$ in luogo di x si sostituisce l'arco Kk , e in luogo di $2 \cos. x$, $\sqrt{3}$, si avrà la resta

$Kk = \sqrt{2 - \sqrt{3}} = \sqrt{\frac{1}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2}}$. Quindi
 $(aK)^2 = 3 - (\sqrt{\frac{1}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2}})^2 \sqrt{2}$ (§. 27.)
 $= 3 - (\sqrt{3} - 1) = 4 - \sqrt{3}$. Ora se coi
centri D , e δ , e col raggio aK si seggino
due archi, che si tagliano in b , sarà il punto
 b sulla retta BR (§. 13.), che dividerà in
due egualmente la $D\delta$ al punto R ad angoli
retti (§. 14.), facendo $RD = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ (§. 104.).
Essendo dunque $(Db)^2 = (DR)^2 + (bR)^2$
(47. lib. 1.); sarà $(bR)^2 = (Db)^2 -$
 $(DR)^2 = 4 - \sqrt{3} - \frac{1}{4} = \frac{13 - 4\sqrt{3}}{4}$

e quindi $bR = \sqrt{3} - \frac{1}{2}$, e $bE = \sqrt{3}$.
Dunque per la Dimostrazione della Soluzio-
ne I. il punto b è uno degli estremi del qua-
drato. Sarà poi lo stesso, se si trovi coi cen-
tri D , ed E , e coi due raggi aK , e BD ,
come nella prima parte di questa Soluzio-
ne II. Avendo poi eguali i lati tra loro i due
triangoli CAe , CBb , sarà l'angolo CBb
 $= CAe$ (8. lib. 1.) $= CBA$. Quindi il
punto e sarà sulla BA , e sarà un altro estre-
mo del quadrato. Finalmente essendo in que-
sta seconda Soluzione le rette Cb , Ce le
stesse di posizione, e di grandezza, che nella
Soluzione prima, ed essendo anche nella pri-
ma Soluzione $Cd = ed$, $Ce = bc$ a cagio-
ne del triangolo equilatero Ced pel paral-
lismo della ed alla BA (2. lib. 6.); sa-
ranno anche i punti d , e c determinati in
questa seconda Soluzione come nella prima.

PROBLEMA.

161. Nel quadrato ABLF inscrivere un
Fig. triangolo equilatero, che ha un angolo
82. B ad un angolo del quadrato.

Soluzione I. Col centro A, e col raggio AB si descriva la semicirconferenza BFE, facendo ad $FB = FE$; si faccia pure $BE = BQ = EQ$. Se si vogliano servire delle sezioni dei lati dati del quadrato; col centro F, e col raggio FQ si descriva un arco, che tagli due lati del quadrato nei punti M, ed N, saranno i punti B, M, N gli estremi del triangolo cercato.

Dimostrazione. Essendo retto l'angolo QAB (f. 83.); sarà $(BQ)^2 = (AB)^2 + (AQ)^2$ (47. lib. 1.), e preso per brevità $AB = 1$; si avrà $4 = 1 + (AQ)^2$; quindi $AQ = \sqrt{3}$; $FQ = AQ - AP = \sqrt{3} - 1 = FM = FN$. Quindi $(FM)^2 = (FN)^2 = 4 - 2\sqrt{3}$, e perb $(MN)^2 = (FM)^2 + (FN)^2 = 8 - 4\sqrt{3}$. Essendo poi $LM = LF - FM = 1 - (\sqrt{3} - 1) = 2 - \sqrt{3}$; sarà $(LM)^2 = 7 - 4\sqrt{3}$. Quindi $(BM)^2 = (BL)^2 + (LM)^2 = 3 - 4\sqrt{3} = (MN)^2$.

illessamente si dimostra essere $(BN)^2 = (MN)^2$.
 Dunque $BM = MN = BN$.

Soluzione II. Se non si suppongano dati, che i quattro estremi del quadrato A^2 B, L, F ; trovato come nella Soluzione I. il punto Q , col centro F , e col raggio FQ si descriva la circonferenza $QRSNM$, e fatto ad $FQ = QR = RS = SN$, col centro B , e col raggio BN si tagli questa circonferenza nel punto M . Saranno i punti B, N, M gli estremi del triangolo cercato.

Dimostrazione. L'arco $QRSN$ è la metà della circonferenza (15. lib. 4.). Dunque il punto N è nella retta QFA , ed è egualmente distante da F , che nella Soluzione I.; dunque è lo stesso. Il punto M anche nella Soluzione I. si trova nella sezione di due archi descritti coi centri F , ed M , e coi raggi eguali ad FQ , ed a BN come in questa; dunque è lo stesso. Dunque cc.

PROBLEMA.

162. In un triangolo equilatero, di cui
 Fig. s. s. o. dati i vertici P, Q, R , inscrivere
 bi. un esagono regolare.

Soluzione. Si divida la distanza QR in tre parti eguali nei punti c , e d (§. 68.). Coi centri c , e d , e col raggio cd si segnino due archi, che si tagliano in A . Collo stesso raggio, e col centro A si descriva un cerchio, e si faccia nella sua circonferenza $ac = cB = BC = CD = DE$. Saranno i punti B, C, D, E, d , e i vertici dell'esagono inscritto.

Dimostrazione. Il triangolo BcQ ha i lati Bc, Qc eguali ai lati Ad, cd del triangolo Ade , e l'angolo compreso eguale pel parallelismo delle due Bc, Ad (27. lib. 1.). Dunque gli è eguale in tutto (4. lib. 1.), e l'angolo $cQB = dcA = cQP$. Dunque il punto B è sulla PQ . Idessamente si dimostra, che gli altri punti C, D, E sono sui lati del triangolo proposto. Dunque cc.

PROBLEMA.

163. In un dato quadrato $ABLF$ inscri-
Fig. vere un ottagono regolare.
81.

Soluzione I. Se si vogliamo servire dell' intersezione dei lati dati del quadrato, col centro A , e col raggio AB si descriva la semicirconferenza $BCDE$, facendo ad $AB = BC = CD = DE$. Si faccia a $BF = BQ$, ad $EA = EQ$. Col raggio AQ , e col centro A si taglino due lati in b , e g . Collo stesso raggio, e coi centri B , L , ed F si taglino in seguito i lati nei punti a , d , c , f , e , h . Saranno questi i vertici dell' ottagono $abedefgh$.

Soluzione II. Trovato come nella Soluzione I. il punto Q ; col raggio AQ , e coi centri A , e B si seguino due archi, che si taglino in O . Collo stesso raggio, e col centro A si tagli il lato AB in b . Col centro O , e col raggio Ob si descriva un cerchio, che tagli i lati del quadrato negli altri punti c , d , e , f , g , h , a . Saranno essi i vertici dell' ottagono.

Soluzione III. Se non fossero dati i lati del quadrato, ma solo i quattro vertici A, B, L, F ; trovato come nella Soluzione I. il punto Q , si faccia ad $EC = EM$, e $BF = BM$. Col raggio AM , e col centro A si descriva un arco, che passi per e, d . Collo stesso raggio, e col centro E si descriva un arco, che passi per f, g . Collo stesso raggio, e col centro L si descriva un arco, che passi per h, a . Collo stesso raggio, e col centro F si descriva un arco, che passi per b, c . Col raggio AQ , e coi centri A, B, L, F si taglino questi archi nei punti b, g, d, a, c, f, e, h . Questi saranno i vertici dell'ottagono.

Dimostrazione. Supposto per brevità, che sia $AB = 1$; sarà $AM = \frac{1}{2}\sqrt{6}$ (5. 104.); $AQ = \frac{1}{2}\sqrt{2}$. Sarà dunque $(Ad)^2 = (AM)^2 = \frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{2} = (AB)^2 + (Bd)^2$ per essere $(Bd)^2 = (AQ)^2 = \frac{1}{2}$. Sarà dunque retto l'angolo ABd (48. lib. 1.), e però il punto d sarà nella BL . Istessamente si dimostrerà, che tutti gli altri punti sono nei lati del quadrato proposto. Si avrà poi $Ld = BL - Bd = 1 - \frac{1}{2}\sqrt{2} = Le$, e $(de)^2 = (Ld)^2 + (Le)^2$ (47. lib. 1.) $= 2(Ld)^2$, e quindi

$$de = Ld \times V_2 = V_2 - 1. \text{ Ma si ha } cd \\ = BL - Ld - Bc = BL - 2Ld = 1 - 2 \\ + V_2 = V_2 - 1.$$

Dunque $cd = de$. itteffamente fi dimofterà, che sono eguali tra loro tutti i lati dell'ottagono. Effendo poi eguali tra loro in tutto i triangoli Lde , Bbc , Aah , Ffg (4. lib. 1.); faranno eguali i loro angoli ai punti a , b , c , d , e , f , g , h ; quindi faranno eguali anche i loro supplementi ai due retti, cioè gli angoli dell'ottagono (13. lib. 1.).

PROBLEMA.

164. **D**ato un ottagono regolare ABh_3fFGH ,
Fig. trovare facilmente 1.° il lato d'un otta-
66. gono regolare doppio di area. 2.° il lato
d'un ottagono triplo.

Soluzione. Col lato AB dell'ottagono dato preso per raggio fatto centro in F , ed H fi descrivano due archi, che fi taglino in a . Darà 1.° af , ovvero aA il lato dell'ottagono doppio. 2.° aB , ovvero ag il lato dell'ottagono triplo.

Dima-

Dimostrazione. Se si supponga essere $AB = 1$, sarà $aA = af = \sqrt{2}$ (§. 139.); $aB = ag = \sqrt{3}$ (§. 2.). Ma le aree delle figure simili sono in ragione duplicata dei lati omologhi (20. lib. 6.). Dunque sarà aA lato d'un ottagono doppio, ed aB è un triplo.

PROBLEMA.

165. **I**n un cerchio di un raggio dato AB Fig. inscrivere tre cerchi, che lo tocchino, 83. e si tocchino tra loro.

Soluzione. Nella circonferenza del cerchio dato si faccia ad $AB = BC = CD = DE = Ed = dc$. Col raggio BD , e col centro B si descriva un arco, che passi per a , p , ed α . Collo stesso raggio BD , e col centro E si tagli quest' arco in α , ed α . Collo stesso raggio, e coi centri C , c si descrivano due archi, che si taglino in V ; e coi centri D , d due altri archi, che si taglino in ν . Collo stesso raggio, e coi centri V , ν si descrivano due archi, che passino per m , ed n . Col raggio AB , e coi

centri a , ed z si tagli la circonferenza del cerchio dato in G , H , ed in g , h . Si faccia in essa circonferenza allo stesso raggio $AB \equiv GL \equiv HI \equiv gl \equiv hi$. Si faccia ad $Aa \equiv BF$, ad $IL \equiv LY \equiv IY \equiv ly \equiv iy$. Ad $Yy \equiv Fm \equiv Fn$, A $Dn \equiv Dp$. Col centro A , e col raggio mn si descriva il cerchio $PSRXQT$, e preso nella sua circonferenza un punto arbitrario P , si faccia $aP \equiv PS \equiv SR \equiv RX \equiv XQ \equiv QT$. Finalmente coi centri P , Q , R , e col raggio pn si descrivano tre cerchi. Saranno quelli i cercati.

Dimostrazione. Essendo la IL corda d'una duodecime parte della circonferenza (§. 32.), sarà $IL \equiv \sqrt{2 - \sqrt{3}}$ (§. 160.). Ed essendo il quadrato del diametro $(Li)^2 \equiv (IL)^2 + (li)^2$ (47. lib. 1. 31. lib. 3.); si avrà $4 \equiv 2 - \sqrt{3} + (li)^2$; quindi $(li)^2 \equiv 2 + \sqrt{3}$, ed $li \equiv \sqrt{2 + \sqrt{3}}$. Si avrà poi (§. 20.) $(ai)^2 \equiv (aB)^2 - li.Aa \equiv 3 - \sqrt{4 + 2\sqrt{3}} \equiv 1 - (1 + \sqrt{3}) \equiv 2 - \sqrt{3}$. Quindi $ai \equiv IL \equiv \sqrt{2 - \sqrt{3}}$. Per le stesse ragioni sarà $aL \equiv LI$; quindi sarà $aLYL$ un rombo, e si avrà $(aY)^2 \equiv 4(ai)^2 - (IL)^2 \equiv 1 - (IL)^2$ (§. 139.). Quindi $aY \equiv IL \cdot \sqrt{3}$. Ma es-

sendo i punti I, ed L egualmente lontani da
 A: saranno i tre punti a , Y, A nella stessa
 retta (§. 13.). Quindi $AY = Aa =$
 $aY = \sqrt{1} = \sqrt{6 - 3\sqrt{3}} = \sqrt{1} =$
 $(3\sqrt{\frac{1}{3}} - \sqrt{\frac{1}{3}}) = \sqrt{\frac{1}{3}} - \sqrt{\frac{1}{3}} = IL$. Lo stesso
 si dimostrerà della Ay. Essendo poi il punto
 y nella ax cioè nella aA (§. 13.); sarà
 $Yy = aAY$. Ora i punti V, B, A, E, v
 sono nella stessa retta (§. 13.). Se si sup-
 ponga per un momento, che nella stessa retta
 sieno i punti m, n ; sarà $Am = AV = Vm$
 $= 1 - \sqrt{3}$. Poichè se si confrontino i punti
 C, c, V, B, A, E coi punti A, B, Q,
 P, p, q della Fig. 3., si avrà in questa
 Figura 83. $VB = AE$ (§. 14.), e quindi
 $AV = 1$. E' poi $Vm = \sqrt{3}$. Intessamente
 si dimostrerà essere $An = 1 - \sqrt{3}$. Quindi
 sarà $(Fm)^2 = (Am)^2 + (AF)^2$ (47.
 lib. 1.) $= 7 - 4\sqrt{3} + 1 = 4(1 - \sqrt{3})$.
 Quindi $Fm = 2\sqrt{1 - \sqrt{3}} = aAY$.
 Si è poi preso nella costruzione della Figura
 $Fn = 2\sqrt{2 - \sqrt{3}}$. Dunque il punto m
 sarà nella retta VA. Lo stesso si dimostra
 del punto n . Dunque essendo perciò $Am =$
 $1 - \sqrt{3}$; sarà $mn = 4 - 2\sqrt{3}$. Avendo
 poi i triangoli BpD, vnd i lati eguali tra
 loro; sarà l'angolo $Dvn = DBp$ (8. lib. 1.).
 Ma l'angolo Dvn , che è lo stesso coll'an-
 golo DvB essendo eguale all'angolo DBV
 (5. lib. 1.), si avrà l'angolo $DBp = DBv$.

Dunque il punto p è nella retta AE . Si ha poi $Dn = Dp$, e intessamente si dimostra $dn = dp$. Dunque confrontando i punti D, d, A, n, p, E di questa Figura coi punti A, B, Q, P, p, q della Figura 3., si troverà in questa Figura 83. essere $pE = An = 2 - \sqrt{3}$. Quindi $pn = AE - 2An = 1 - 4 + 2\sqrt{3} = 2\sqrt{3} - 3$. Essendo poi il triangolo equilatero PQR simile al triangolo equilatero BDd , e quindi anche il triangolo ABD simile al triangolo APR (20. lib. 6.); sarà $AB : BD :: AP : PR$. Cioè $1 : \sqrt{3} :: 4 - 2\sqrt{3} : PR$. Quindi $PR = 4\sqrt{3} - 6 = 2pn$. Tagliata dunque per metà la PR in p , sarà il punto p egualmente nelle due circonferenze de' cerchi descritti coi centri P . ed R , e sarà p il punto di contatto (12. lib. 3.). Si aggiunga ora alla retta $AR = pn = 4 - 2\sqrt{3}$ il raggio del cerchio descritto col centro R , ossia la retta $Rr = np = 2\sqrt{3} - 3$; si avrà $Ar = 4 - 3 = 1 = AB$. Dunque il punto r sarà egualmente nelle due circonferenze, e il cerchio descritto col centro R toccherà internamente il cerchio dato (11. lib. 3.). Lo stesso si dimostrerà degli altri. Dunque cc.

266. Questo Problema viene sciolto elegantemente da Tommaso Simpson *Select Exercises &c. Geometrical Problems* Probl. 13. col cerchio, e colla riga. Dalla nostra costruzione

apparisce poterfi sciogliere ancora più brevemente colla riga, e col compasso, di quello che fa il Simpson, se condotta la retta Vav , e fatto in essa ad $AB = BV = Ev$, si faccia a $BD = Vm = Bv = vm$, col centro A , e col raggio ma si descriva il cerchio PQR , e si faccia il restante come nella Soluzione antecedente.

PROBLEMA.

167. **C**ol centro A descrivere un cerchio, Fig. che tocchi esteriormente i tre cerchi
83. inscritti per il Problema antecedente (§. 166.) ad un cerchio dato.

Soluzione. Si cerchi una terza proporzionale alle due AB , Am (§. 86.). Con essa presa per raggio, e col centro A si descriva un cerchio. Sarà esso il cercato.

Dimostrazione. Essendo $AB = 1$; $Am = 2 - \sqrt{3}$, sarà la terza proporzionale $= 7 - 4\sqrt{3}$. Ora se dal raggio $Ar = 1$ si sottragga il diametro qr del cerchio descritto col centro R , cioè se si sottragga $2np = 4\sqrt{3} - 6$; si avrà appunto $7 - 4\sqrt{3}$.
L 3

Dunque un cerchio descritto col centro A , e con quella terza proporzionale toccherà quello cerchio inscritto nel punto g (12. lib. 3.), e toccherà ancora gli altri due cerchi.

PROBLEMA.

168. In un cerchio di raggio dato AB Fig. inscrivere quattro cerchi, che siano tangenti di esso, e tra loro.

Soluzione. Si faccia nella circonferenza del dato cerchio ad $AB = BC = CD = DE$. Quindi a $BD = Ba = Ea$; quindi ad $Aa = BF = Bf$; quindi ad $AB = FN = FO$; quindi a $BD = NP = OP$. Col centro A , e col raggio aP si descriva il cerchio $QRST$. Preso un punto arbitrario Q sulla sua circonferenza, si faccia in essa a $BQ = FR = ES = fT$. Coi centri Q, R, S, T , e col raggio aF si descrivano quattro cerchi. Essi saranno i cercati.

Dimostrazione. Essendo $BF = FE = Ef = fB$ (§. 27.); sarà ancora $QR = RS = ST = TQ$ (§. 91.). Sarà dunque retto

l'angolo TAQ . Dunque $(TQ)^2 = (AT)^2 + (AQ)^2 = 2(AT)^2$. Preso poi $AB = 1$; sarà anche $FP = 1$ (§. 165.); quindi $AP = 2$. Sarà pure $Aa = \sqrt{2}$ (§. 17.); quindi $aP = 2 - \sqrt{2}$; $aF = \sqrt{2} - 1$. Quindi $2(AT)^2 = 2(aP)^2 = (TQ)^2 = 2(2 - \sqrt{2})^2$, e $TQ = (2 - \sqrt{2})\sqrt{2} = 2\sqrt{2} - 2 = 2(\sqrt{2} - 1) = 2aF$.

Dunque la distanza dei due centri T , e Q è eguale alla somma dei raggi dei due cerchi descritti con questi centri. Quindi essi si toccano alla metà della TQ in p . Lo stesso si proverà di due altri qualunque. Sia poi r il punto, dove la AR continuata taglia il cerchio descritto col centro R ; sarà $Ar = AR + Rr = aP + aF = PF = 1 = AB$. Dunque il punto r sarà nella circonferenza del cerchio dato. Quindi la Ar passando pei due centri A , ed R sarà perpendicolare alla tangente d'entrambi al punto r ; quindi essi si toccheranno tra loro (13., e 16. lib. 3.). Lo stesso si dimostra degli altri.

169. **C**ol centro *A* descrivere un cerchio, Fig. che tocchi i quattro ultimamente inscritti (§. 168.) in un cerchio dato.

Soluzione. Si trovi una terza proporzionale alle due rette *FP*, *Fa* (§. 86.). Con essa presa per raggio, e col centro *A* si descriva un cerchio. Esso sarà il cercato.

Dimostrazione. Essendo $PF = 1$, $Fa = \sqrt{2} - 1$, sarà la terza proporzionale eguale a $1 - 2\sqrt{2}$. Ora sia *q* il punto, dove il raggio *Ar* taglia il cerchio descritto col centro *R*. Sarà *qr* diametro di esso cerchio $= 2aF = 2\sqrt{2} - 1$; il qual valore sottratto da $1 = Ar$, lascerà $Aq = 1 - 2\sqrt{2}$ eguale a quella terza proporzionale. Dunque il punto *q* sarà nelle due circonferenze; ed essendo nella retta *AR*, la perpendicolare ad essa retta in *q* sarà tangente ai due cerchi, i quali si toccheranno in *q* (13., e 16. lib. 3.). Lo stesso si dimostrerà per gli altri.

PROBLEMA.

170. **T**rovare un arco di cerchio, che abbia il coseno eguale alla corda.

Fig. 85.

Soluzione. Con un raggio AB supposto $= 1$ sia descritto l'arco $BCDE$, e si faccia ad $AB = BC = CD = DE = DP = CP$. Quindi si faccia a $BD = Ba = Ea$. Quindi ad $Aa = BF$. Col raggio PF , e col centro B si segni un arco, che tagli l'arco BC in Q . Sarà l'arco BQ il cercato.

Dimostrazione. I punti A, F, a, P sono nella stessa retta (§. 13.). I punti poi B, A, D, P essendo lontani dal punto C per la distanza CB sono nella circonferenza d'un cerchio, che si descrive col centro C , raggio CB . Inoltre essendo a $CB = BA = AD = DP$, sarà BCP diametro di questo cerchio (§. 15. lib. 6.), e $PA = \sqrt{3}$ (§. 2.). Quindi $PF = \sqrt{3} - 1 = BQ$. Se ora si cala QR perpendicolare sopra AB , si avrà $(BQ)^2 = (AB)^2 + (AQ)^2 - 2AB \cdot AR$ (§. 13. lib. 2.); cioè $(\sqrt{3} - 1)^2 = 4 - 2\sqrt{3} = 2 - 2AR$, e quindi $AR = \sqrt{3} - 1 = BQ$, come si era proposto di fare.

Questi ultimi Problemi sono dell'Ozanama sciolti da esso colla riga, e col compasso.

PROBLEMA.

171. **D**ati gli assi BE, MN d'una ellisse, Fig. 86. descrivere intorno ad essi un'ovale composta di quattro archi di cerchio, che siano tangenti tra loro.

Soluzione. Col centro A, dove si tagliano gli assi, e col raggio AB, che è il semi-asse maggiore, si descriva la semicirconferenza BDE, e si faccia ad EA = ED. Col centro B, e col raggio BD si tagli l'asse BE in d. Col centro A, e col raggio AM si tagli il semi-asse AE in m. Collo stesso centro A, e col raggio Ad si descriva l'arco de, e si faccia ad Em = de. Con un raggio arbitrario, e coi centri d, ed e si tagli l'arco BDE in s, ed r. Col raggio sr, e col centro A si tagli l'asse BE in P, e Q. Coi centri P, e Q, e col raggio PB = QE si descrivano gli archi FBf, GEg, e si faccia a PB = BF = Bf = EG = Eg. Quindi si faccia a PQ = PR = Pr = QR = Qr. Quindi col centro R, e col raggio RF si descriva l'arco FG, che

passerà per M. Collo stesso raggio $RF = rf$, e col centro r si descriva l'arco fg , che passerà per N, e sarà fatto quanto volevasi.

Dimostrazione. Essendo equilateri i triangoli BFP , PQR , saranno eguali gli angoli BPF , QPR (8. lib. 1.); quindi le due FP , PR formeranno una sola retta, perchè i due angoli $FPA + APR$ sono eguali ai due $FPA + APN$ (13., e 14. lib. 1.). Dunque i due archi BF , FG si toccheranno l'un l'altro in F (13. lib. 3.). Lo stesso concetto si dimostra ai punti f , G , g . Se poi si supponga per brevità $AB = 1$, sarà $BD = \sqrt{3}$ (§. 2.) $= Bd$; quindi $Ad = \sqrt{3} - 1$. Essendo poi $Ad : de :: A\hat{d} : \hat{d}e$ (§. 93.), sarà ancora moltiplicando tutti due i termini della prima ragione per $\sqrt{3} + 1$ (4. lib. 5.) $Ad(\sqrt{3} + 1) : de(\sqrt{3} + 1) :: A\hat{d} : \hat{d}e$, e sostituendo i valori numerici di Ad , ed $A\hat{d}$, ed eseguendo la moltiplicazione nel primo termine, si avrà $2 : de(\sqrt{3} + 1) :: 1 : \hat{d}e$. Quindi $2\hat{d}e = 1AP = de(\sqrt{3} + 1) = PQ = PR$. Essendo poi PRQ un rombo, si avrà (§. 139) $(Rr)^2 = 4(PR)^2 - (PQ)^2 = 3(PR)^2$. Quindi $Rr = PR.\sqrt{3} = de(3 + \sqrt{3})$, ed $RA = \frac{1}{2}de(3 + \sqrt{3})$. Si ha poi $AM = Am = AE = Em = AE - de = 1 - de$. Quindi

$RA + AM = 1 + \frac{1}{2}de(1 + \sqrt{3})$, ossia
 $RM = 1 + \frac{1}{2}PR$. Estendo poi $PF = PB$
 $= 1 - AP = 1 - \frac{1}{2}PR$, si avrà $PF +$
 $PR = 1 + \frac{1}{2}PR$, cioè $FR = RM$. Dunque
 l'arco FG passerà per M . Itteffamente si
 mostrerà che l'arco fg passerà per n . Dun-
 que cc.

PROBLEMA.

171. **D**escrivere una spirale BLEMFGPH
 Fig. composta di più archi di cerchio.
 87.

Soluzione. Sia $BE = BF$ la distanza, che
 si vuol dare alle rivoluzioni di questa
 spirale. Divisa la BE per metà in A
 (§. 66.), col centro A , e col raggio
 AB si descriva la semicirconfenza BLE
 (§. 64.). Col centro B , e col raggio
 BE si descriva la semicirconfenza EMF .
 Di nuovo col centro A , e col raggio
 AF si descriva la semicirconfenza FNG .
 Di nuovo col centro B , e col raggio
 BG si descriva la semicirconfenza GLH .
 Nella stessa maniera si potrebbe prose-
 guire questa spirale indefinitamente.

Si potrà allo stesso modo duplicare quella spirale, se preso il punto *b* ad una distanza qual si vuole da *B* sulla *AB* (§. 73.), coi centri *A*, e *B* a vicenda si descriveranno le semicirconferenze *ble*, *cmf*, *fug*, *gph* ec.

Quello Problema non ha bisogno di dimostrazione.

PROBLEMA.

173. **T**rovare $\sqrt{\sqrt{2}}$, e $\sqrt{\sqrt{3}}$.

Soluzione. Col raggio $AB = r$, e col Fig. centro *A* si descriva la semicirconferenza
88. *BCDE*, facendo ad $AB = BC = CD = DE$. Quindi si faccia $aBD = Ba = Ea$. Quindi ad $Aa = BP$; ad $AB = EP$. Sulla semicirconferenza si notino i punti *H*, *I*, *K*, facendo alla stessa $AB = aH = HI = IK$.

Col raggio *AP*, e coi centri *E*, ed *H* si segnino due archi, che si taglino in *L*, ed *M*. Sarà $LM = \sqrt{\sqrt{2}}$.

Col raggio *AB*, e coi centri *a*, e *K* si segnino due archi, che si taglino in *Q* ed *R*. Sarà $QR = \sqrt{\sqrt{3}}$.

Dimostrazione. Essendo $ELHM$ un rombo, sarà (§. 139.) $(LM)^2 = 4(LH)^2 - (HE)^2 = 4(AP)^2 - (HE)^2$; ma $(AP)^2 = \frac{1}{2}$ (§. 104.), $(HE)^2 = 2 - \sqrt{2}$ (§§. 30. e 36.). Dunque $(LM)^2 = \sqrt{2}$; quindi $LM = \sqrt{\sqrt{2}}$.

Essendo pure $aQKR$ un rombo, si avrà egualmente $(QR)^2 = 4(aQ)^2 - (aK)^2$. Ma $(aQ)^2 = (AB)^2 = 1$; $(aK)^2 = 4 - \sqrt{3}$ (§. 160.). Dunque $(QR)^2 = \sqrt{3}$; quindi $QR = \sqrt{\sqrt{3}}$.

274. Con simili artifizj si potrebbero trovare le radici quarte degli altri numeri interi senza servirsi del metodo di trovare le medie proporzionali (§. 99.). Con esso per avere $\sqrt{\sqrt{2}}$ si sarebbe dovuta trovare una media proporzionale tra 1, e $\sqrt{2}$, ovvero tra $\frac{1}{2}$, e $2\sqrt{2}$, o tra altre due quantità, che moltiplicate una per l'altra dessero $\sqrt{2}$. Ma la sua strada sarebbe molto più complicata. Se si coltiverà questa Geometria del Compasso, se ne avranno dei frutti utilissimi. Io tengo preparate sopra ciò altre ricerche, che potranno aver luogo in un'Opera più estesa di questa. Ecco un uso del Problema antecedente per rapporto alla Piramide tetraedra regolare.

PROBLEMA.

175. **D**ito il lato AB d'una piramide regolare $SABC$; trovare I. la sua altezza. II. il lato d'un quadrato, che ne agguagli la superficie. III. il lato d'un quadrato, sul quale costruendo una piramide, che abbia per altezza il lato della propolla, la agguagli in solidità. IV. il lato d'un quadrato, sul quale costruendo una piramide d'altezza eguale alla propolla, l'agguagli anche in solidità. V. il raggio d'una sfera circonscritta.

Soluzione. Costruita col raggio AB la Figura 88., come nel Problema §. 173., col centro B , e col raggio Ba si descriva l'arco aN , e si faccia ad $Aa = EN$. Col raggio AN , e coi centri A , ed E si segnano due archi, che si tagliano in n . Collo stesso raggio nA si tagli la semicirconferenza $BCDE$ in S . Si divida LM per metà in m (§. 66.), così pure QR per metà in q . Sava

- I. BS l'altezza della piramide.
- II. QR il lato del quadrato, che ne agguaglia la superficie.

- III. Mm il lato del quadrato base d'una piramide d'altezza eguale al lato della proposta, e ad essa eguale in solidità.
 IV. Qq il lato del quadrato base d'una piramide di altezza, e di solidità eguale alla proposta.
 V. AN il diametro d'una sfera circonscritta.

Dimostrazione. Se dal vertice S della piramide si cali una perpendicolare Sm sul lato AB , essendo equilatero il triangolo SAB , essa taglierà in m per metà la AB (12. lib. 1.). Se quindi nella base ABC si alza alla AB da m la perpendicolare mT , essa passerà per C (11. lib. 1.), e sarà in essa il punto T dove cade da S la perpendicolare sulla base (11. lib. 11.). Egualmente si dimostra, che il punto T sarà nella retta Bn , che taglia per metà il lato AC . Si guidi la mn , essa sarà parallela alla BC (2. lib. 6.), e il triangolo Amn sarà equiangolo al triangolo ABC (27. lib. 1.), e la BC dupla della mn (4. lib. 6.). Saranno poi equiangoli tra loro i triangoli $BC T$, $mn T$ (15., e 27. lib. 1.), e sarà $BC : mn :: CT : mT$ (4. lib. 6.). Dunque CT doppia della mT ; quindi $mT = \frac{1}{2} Cm$. Posto poi $AB = 1$, si ha $Cm = Sm = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ (6. 104.). Dunque

Tm

$Tm = \frac{1}{2}\sqrt{3}$. Essendo poi $(Sm)^2 = (mT)^2 + (ST)^2$ (47. lib. 1.), cioè $\frac{1}{4} = \frac{1}{4} + (ST)^2$; si avrà $(ST)^2 = \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$; quindi $ST = \sqrt{\frac{1}{4}}$.

Fig. 88. Si ha poi $AN = \frac{1}{2}\sqrt{6}$ (§. 104.) $= \sqrt{\frac{3}{2}}$
 $= \sqrt{\frac{1}{2}} = An$. Si ha pure $Az : AS :: AS : SB$ (§. 85.); cioè $\sqrt{\frac{1}{2}} : 1 :: 1 : SB$. Quindi
 Fig. 89. $SB = \sqrt{\frac{1}{2}} = ST$. Che era il primo.

La superficie poi della piramide tetraedra è eguale a quadruplo della superficie della base
 Fig. 89. ABC , la quale essendo eguale a $\frac{1}{2}AB \cdot Cm = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ (41. lib. 1.), sarà la superficie della piramide $= \sqrt{3}$. Quindi il lato del quadrato, che l'agguaglia $= \sqrt{\sqrt{3}}$. Ma è la
 Fig. 88. $QR = \sqrt{\sqrt{3}}$ (§. 173.). Dunque la QR è il lato del quadrato cercato. Che era il secondo.

Essendo nelle piramidi eguali reciproche tra loro le basi, e le altezze (9. lib. 12.), si avrà $1 : \sqrt{\frac{1}{2}} :: \frac{1}{2}\sqrt{3} : \text{alla base della piramide, che ha l'altezza} = AB = 1$. Quindi sarà l'area di questa base $= \frac{1}{2}\sqrt{2}$, e il lato del quadrato di quest'area $= \frac{1}{2}\sqrt{\sqrt{2}} = Mm$ (§. 173.). Che era il terzo.

Essendo le piramidi d'altezza eguale in ragione delle basi, il quadrato eguale al triangolo $ABC = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ avrà per lato $\frac{1}{2}\sqrt{\sqrt{3}} = Qq$ (§. 173.). Che era il quarto.

E' poi il diametro della sfera circoscritta alla piramide tetraedra la potenza sesquialtera del lato della piramide (13. lib. 13.), cioè $= \sqrt{\frac{1}{2}}$. E' dunque $= AN$. Che era il quinto.

176. **D**ata l'altezza ST d'una piramide
Fig. tetraedra regolare, trovare il suo lato
89. AB .
e
88.

Soluzione. Con un raggio AB (Fig. 88.)
eguale ad ST (Fig. 89.) si descriva il
semicerchio $BCDE$. fatto ad $AB = BC$
 $= CD = DE$. Col centro B , e col rag-
gio BD si descriva l'arco DNa , e collo
stesso raggio, e col centro E si tagli in
 a . Col raggio Aa , e collo stesso centro
 E si tagli in N . Sarà AN il lato cer-
cato eguale al lato AB della Fig. 89.

Dimostrazione. Nella Figura 88. si ha $AB :$
 $AN :: 1 : \sqrt{\frac{1}{2}}$ (§. 175.), ed essendo $1 :$
 $\sqrt{\frac{1}{2}} :: \sqrt{\frac{1}{2}} : 1$, come resta dimostrato dall'
eguaglianza del prodotto degli estremi, e de'
medj, sarà AB ad AN come $\sqrt{\frac{1}{2}}$ ad 1 ,
cioè nel rapporto dell'altezza della piramide
tetraedra al suo lato (§. 175.). Dunque co.

PROBLEMA.

177. **D**ividere la $AB = 1$ in cinque parti
 Fig. eguali anche nel caso, che non si possa
 92 avere una quintupla della AB , come
 al §. 69.

Soluzione. Col raggio AB , e col centro A descritto il cerchio BDp , e fatto nella sua circonferenza ad $AB = BC = CD = DE$, quindi a $BD = Ba = B\alpha = Ea = E\alpha$, col raggio AB , e col centro α si tagli la circonferenza in g , e collo stesso raggio, e col centro g si descriva l'arco $An\alpha$. Ora col raggio BE , e col centro α si tagli quest'arco in n . Col raggio αn , e col centro B si tagli la circonferenza in P , e p . Collo stesso raggio pB , e coi centri p , e P si seguino due archi, che si taglino in Q . Darà AQ una quinta parte della AB posta sulla sua direzione.

Dimostrazione. Se si supponga un punto u sulla direzione della AE , e sia $Au = A\alpha$, sarà per gli angoli retti αAu , $\alpha A\alpha$, $(\alpha u)^2 = 2(\alpha A)^2 = 2(\alpha A)^2 = (\alpha u)^2 = 4 = (BE)^2$; quindi $\alpha u = \alpha\alpha = BE = \alpha\alpha$. Essendo poi

eguali gli angoli gAB , $gA\tau$ semiretti entrambi (§. 30.), saranno eguali tra loro gli angoli gAa , gAu ciascuno eguale a tre semiretti. Quindi nei due triangoli gAa , gAu aventi un angolo eguale compreso fra lati eguali sarà anche eguale il terzo loro ga , al terzo gu (4. lib. 1.); quindi un cerchio descritto col centro g raggio ga passerà per u , e sarà concentrico al cerchio Anx . Si ha poi $ga = \sqrt{5}$ (§. 185.), ed essendo $an = u_2$, si ha (§. 93.) $ga : gA :: au : na$, cioè $\sqrt{5} : 1 :: 2 : na$. Dunque sarà $na = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

Quindi anche ciascun lato del rombo $PBpQ$ $= na = \frac{2}{\sqrt{5}}$. Quindi se si confrontino i

punti P , B , p , Q , A di questa Figura 90. coi punti A , p , B , P , Q della Figura 3., si avrà per la Figura 90. $BQ \cdot BA = (BP)^2$ (§. 19.), cioè $BQ = \frac{4}{5}$. Quindi AQ , che è nella stessa retta (§. 13.) $= \frac{1}{5}$.

178. Questo Problema, che ha una Soluzione abbastanza semplice, non doveva essere omnesso in grazia della divisione decimale, che si eseguisce dividendo in due, quindi in cinque, o viceversa. Serve ancora al seguente

PROBLEMA.

179. **D**escrivere un triangolo rettangolo, Fig. i di cui lati siano in proporzione aritmetica.

Soluzione. Fatta la costruzione della Soluzione precedente (§. 177.), col centro E, e col raggio EQ si tagli la circonferenza in N. Sarà il triangolo BNE il cercato.

Dimostrazione. Esso sarà rettangolo (31. lib. 3.). Posto poi $AB = 1$, sarà $EQ = EA + AQ = \frac{1}{2} = EN$. Ed avendosi $(BE)^2 = (EN)^2 + (BN)^2$ (47. lib. 1.), cioè $4 = \frac{1}{4} + (BN)^2$, sarà $(BN)^2 = \frac{15}{4}$, quindi $BN = \frac{\sqrt{15}}{2}$. Quindi saranno i lati $EN = \frac{1}{2}$, $BN = \frac{\sqrt{15}}{2}$, $BE = 1$ in proporzione aritmetica.

PROBLEMA.

180. **D**escrivere un triangolo rettangolo, Fig. i di cui lati siano in proporzione geometrica.

Soluzione. Con un raggio AB centro A si descriva un cerchio B D d, e si faccia

nella sua circonferenza ad $AB = BC = CD = DE = Ed = dc$. Quindi si faccia a $BD = Ba = Ea$, quindi ad $Aa = Db = db = C\beta = c\beta$. Ora col raggio $b\beta$, e col centro E si tagli la circonferenza del cerchio in N. Il triangolo BNE sarà il cercato.

Dimostrazione. La AB resta divisa in b in estrema, e media ragione (§. 46.). Quindi se si faccia $AB = 1$; $Ab = x$, si avrà $Bb = 1 - x$; $x^2 = 1 - x$; e quindi $x = Ab = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$, donde risulta $b\beta = 1 - Ab = \sqrt{5} - 1 = EN$. Si ha poi $(BE)^2 = EN^2 + (BN)^2$ (31. lib. 3. 47. lib. 1.), cioè $4 = 6 - 2\sqrt{5} + (BN)^2$. Quindi $(BN)^2 = 2(\sqrt{5} - 1) = BE \cdot NE$. Si ha dunque $BE : BN :: BN : NE$ (17. lib. 6.). Dunque ec.

181. *Lemma.* Positi i lati dei cinque poliedri regolari $= 1$; sarà il raggio d'una sfera, che contiene il tetraedro $= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}$
 il cubo $= \frac{1}{2}\sqrt{3}$
 l'ottaedro $= \frac{1}{2}\sqrt{2}$
 il dodecaedro $= \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot (\sqrt{5} + 1)$
 l'icosaedro $= \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{5 + \sqrt{5}}{2}\right)}$

Dimostrazione. Per la 13. lib. 13. il diametro della sfera, che contiene la piramide com-

presa da quattro triangoli equilateri, è per potenza sesquialtero del lato della piramide, cioè posto il lato $\equiv 1$, è il diametro $\equiv \sqrt{\frac{1}{2}}$; quindi il raggio $\equiv \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}$.

Per la 15. lib. 13. il diametro della sfera, che contiene il cubo, è per potenza triplo del lato, cioè $\equiv \sqrt{3}$; quindi il raggio $\equiv \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

Per la 14. lib. 13. il diametro della sfera, che comprende l'ottaedro, cioè quel corpo regolare, che ha otto faccie tutte triangoli equilateri, è duplo in potenza del lato d'uno di questi triangoli, cioè $\equiv \sqrt{2}$; quindi il raggio $\equiv \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

Per la 17. lib. 13. la sfera, che comprende il dodecaedro, cioè quel corpo regolare, che ha dodici faccie tutte pentagoni regolari, comprende anche un cubo, che ha per lato una diagonale di quei pentagoni. Ma la diagonale BN (Fig. 64.) d'un pentagono ABLMN posto il lato AB $\equiv 1$, dico che è $\equiv \frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1)$. Poichè è (§. 137.) BN \equiv bE \equiv Ab + AE $\equiv \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1) + 1$ (§. 180.) $\equiv \frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1)$. Dunque la BN, ossia la diagonale d'un pentagono, che ha il lato $\equiv 1$, è $\equiv \frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1)$. Se sopra questa si forma un cubo, il diametro della sfera, che lo comprende, sarà di potenza triplo di questa, cioè $\equiv \frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1)\sqrt{3}$. Dunque il raggio di questa sfera, che comprende il dodecaedro, è $\equiv \frac{1}{4}\sqrt{3} \cdot (\sqrt{5} + 1)$.

Per la 16. lib. 13. se sia AB il diametro della sfera, che comprende l'icosaedro, e Fig. presa in esso la AC quadrupla di CB, e al- 92. zata la perpendicolare CD, che incontra in D la semicirconferenza ADB, se col raggio DB si descrive un cerchio, e in questo cerchio un pentagono regolare, il lato di questo pentagono sarà il lato dell'icosaedro, cioè di quel corpo regolare, che ha venti faccie tutte triangoli equilateri. Ora il lato del pentagono ha quel rapporto al raggio del cerchio circoscritto, che ha la retta Bb alla BA Fig. 12. (6. 40.). Ma posto $AB = 1$, si ha $Ab = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$; $(Ab)^2 = \frac{1}{4}(6 - 2\sqrt{5}) = \frac{1}{2}(3 - \sqrt{5})$; $(Bb)^2 = (AB)^2 + (Ab)^2$ (47. lib. 1.) $= \frac{5 - \sqrt{5}}{2}$. Quindi si avrà

$$Bb : AB :: \sqrt{\left(\frac{5 - \sqrt{5}}{2}\right)} : 1 ; \text{ ma si ha } \sqrt{\left(\frac{5 - \sqrt{5}}{2}\right)} : 1 :: 1 : \sqrt{\left(\frac{5 + \sqrt{5}}{10}\right)}.$$

Dunque posto il lato dell'icosaedro $= 1$, sarà BD (Fig. 92.) $= \sqrt{\left(\frac{5 + \sqrt{5}}{10}\right)}$. Si ha poi $(AB)^2 = 5(BD)^2$ (16. lib. 13.) $= \frac{5 + \sqrt{5}}{2}$.

Dunque $AB = \sqrt{\left(\frac{5 + \sqrt{5}}{2}\right)}$, e il raggio $= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{2}}$.

PROBLEMA.

182. **D**ato il lato AB dei cinque corpi Fig. regolari, trovare il raggio delle diverse sfere, che li comprendono.

Soluzione. Col raggio AB centro A si descriva il cerchio $B D d$, e si faccia nella sua circonferenza ad $AB = BC = CD = DE = E d$. Quindi si faccia a $BD = Ba = B\alpha = B a = E a$. Col centro α , e col raggio αa si descriva l'arco $a P$. Collo stesso centro α , e col raggio αB si descriva l'arco $B p q s$. Collo stesso centro α , e col raggio AB si descriva l'arco $g r t$. Collo stesso centro α , e col raggio BE si descriva l'arco $M Q R S T$. Col raggio $A a$, e coi centri D, d si descrivano due archi, che si taglino in b . Col raggio $A b$, e col centro E si tagli la circonferenza in L . Si faccia ad $AB = a P = M Q$, quindi ad $A a = M R$, quindi ad $E b = M S$, quindi a $BL = M T$. Si faccia poi ad $a B = P p$, quindi ad $M B = Q q = S s$, quindi ad $M g = R r = T t$. Sarà

Bp	il raggio	il tetraedro
Bq	della sfera,	il cubo
gr	che	l'ottaedro
Bs	comprende	il dodecaedro
gt		l'icosaedro

Dimostrazione. Posto $AB = 1$, si ha $\alpha a = 2\sqrt{2}$ (§. 100.), $\alpha B = \sqrt{3}$. Si ha poi $\alpha a : \alpha B :: \alpha P : Bp$ (§. 93.), cioè $2\sqrt{2} : \sqrt{3} :: 1 : Bp$. Sarà dunque $Bp = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}$. Quindi ec. (§. 181.).

Si ha pure (§. 93.) $\alpha M : \alpha B :: MQ : Bq$, cioè $2 : \sqrt{3} :: 1 : Bq$. Quindi $Bq = \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

Parimente si ha $\alpha M : \alpha g :: MR : gr$, cioè $2 : 1 :: \sqrt{2} : gr$; quindi $gr = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

Si ha egualmente $\alpha M : \alpha B :: MS : Bs$. Ma $MS = bE = \frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1)$ (§. 181.), dunque $2 : \sqrt{3} :: \frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1) : Bs$. Quindi $Bs = \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot (\sqrt{5} + 1)$.

Si ha finalmente $\alpha M : \alpha g :: MT : gt$. Ma $MT = BL$. E' poi $(BL)^2 = (BE)^2 - (EL)^2$ (31. lib. 3. 47. lib. 1.), cioè $(BL)^2 = (BE)^2 - (Ab)^2 = 4 - \frac{1}{2}(3 - \sqrt{5})$ (§. 181.) $= \frac{5 + \sqrt{5}}{2}$. Quindi $BL = MT = \sqrt{\left(\frac{5 + \sqrt{5}}{2}\right)}$; e però $2 : 1 :: \sqrt{\left(\frac{5 + \sqrt{5}}{2}\right)} :$

gt ; e quindi $gt = \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{5 + \sqrt{5}}{2}\right)}$.

Dunque le distanze Bp , Bq , gr , Bs , gr saranno rispettivamente i raggi delle sfere, che comprendono i cinque corpi regolari piramidali, cubo, ottaedro, dodecaedro, icosaedro.

PROBLEMA.

183. **D**ato il raggio AB della sfera, che
Fig. comprende i cinque corpi regolari, tro-
94. vare i lati di essi.

Soluzione. Sia col raggio AB , centro A descritto il cerchio massimo della sfera BDd , e sia fatto nella sua circonferenza ad $AB = BC = CD = DE = Ed$. Quindi $a BD = Ba = Ea$; quindi ad $Aa = Db = db$.

Si faccia poi nella circonferenza ad $AB = aH$, quindi ad $Aa = EF = Hh$. Col centro a , e col raggio aE si descriva l'arco $ESQP$. Collo stesso centro a , e col raggio BE si descriva l'arco $Lstqp$. Collo stesso centro a , e col raggio ah si descriva l'arco hT . Si faccia ad $Aa = EP$; ad $AB = EQ$; ad $Ab = ES$; $a bF = hT$. Quindi si fac-

cia ad $EL = Pp = Qq = Ss$; quindi ad $hL = Tt$. Sarà

Lp	il lato del	tetraedro
Lq		cubo
Aa		ottaedro
Ls		dodecaedro
Lt		icosaedro

Dimostrazione. Si ha l'arco EA eguale ad una ottava parte della circonferenza (§. 30.); quindi $aA = V5$ (§. 185.). Essendo poi retto l'angolo bAF lo stesso, che BAF per essere il punto b sulla AE (§§. 13. 27.), sarà bF il lato del pentagono (§. 40.), Ab il lato del decagono inscritto al cerchio BD (§. 41.). Posto dunque $AB = 1$, sarà $Ab = \frac{1}{2}(V5 - 1)$ (§. 180.), $(bF)^2 = (AF)^2 + (Ab)^2 = 1 + \frac{1}{4}(6 - 2V5) = \frac{5 - V5}{2}$;

quindi $bF = hT = \sqrt{\frac{5 - V5}{2}}$. Si

avrà poi $aE : aL :: EP : Lp$ (§. 93.), cioè $V3 : 2 :: V3 : Lp$. Sarà dunque $Lp = 2V\frac{2}{3}$. Ora il rapporto del raggio della sfera al lato del tetraedro contenuto è $\frac{1}{2}V\frac{2}{3} : 1$ (§. 181.) :: $1 : 2V\frac{2}{3}$. Posto dunque il raggio AB della sfera $= 1$; sarà Lp il lato del tetraedro contenuto.

Si avrà pure (§. 93.) $aE : aL :: EQ : Lq$,

cioè $\sqrt{3} : 2 :: 1 : L_7$; quindi $L_7 = 2\sqrt{\frac{1}{3}}$.
 Ora il rapporto del raggio della sfera al lato
 del cubo contenuto è $\frac{1}{2}\sqrt{3} : 1$ (§. 181.) ::
 $1 : 2\sqrt{\frac{1}{3}}$. Dunque ec.

Si avrà parimente $Aa = \sqrt{2}$ lato dell'ottaedro.
 Poichè il rapporto del raggio della sfera al lato
 dell'ottaedro contenuto è $\frac{1}{2}\sqrt{2} : 1$ (§. 181.) ::
 $1 : \sqrt{2}$. Dunque ec.

Eguualmente si avrà $aE : aL :: ES : L_5$, cioè
 $\sqrt{3} : 2 :: \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1) : L_5$; quindi $L_5 =$
 $\frac{\sqrt{5} - 1}{\sqrt{3}}$. Ora il rapporto del raggio della
 sfera al lato del dodecaedro contenuto è $=$
 $\frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot (\sqrt{5} + 1) : 1$ (§. 181.) :: $1 :$
 $\frac{\sqrt{5} - 1}{\sqrt{3}}$. Dunque ec.

Finalmente si avrà $aH : aL :: hT : L_1$ (§. 93.),
 cioè $\sqrt{5} : 2 :: \sqrt{\left(\frac{5 - \sqrt{5}}{2}\right)} : L_1$. Quindi

$L_1 = 2\sqrt{\left(\frac{5 - \sqrt{5}}{10}\right)}$. Ora il rapporto del
 raggio della sfera al lato dell'icosaedro con-
 tenuto è $\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{5 + \sqrt{5}}{2}\right)} : 1$ (§. 181.) :: $1 :$
 $2\sqrt{\left(\frac{5 - \sqrt{5}}{10}\right)}$. Dunque ec.

PROBLEMA.

184. **D**ato un punto B nella circonferenza
 FIG. di un cerchio dato; trovare altri due
 95. punti L, ed M, tali che il triangolo
 BLM sia equilatero, e tocchi il cerchio
 col lato LM alla metà di esso lato in E.

Soluzione. Si faccia al raggio del cerchio
 dato $AB = BC = CD = DE = Ed$
 nella circonferenza di esso. Quindi si
 faccia $aBD = Ba = Ea$. Col centro
 a , e col raggio aA si descriva un ar-
 co, che passi per a . Col centro E, e
 col raggio EA si descriva un arco, che
 lo tagli in a . Collo stesso raggio aE ,
 e col centro a si tagli la circonferen-
 za in P. Ora col raggio EP, e col
 centro E si descriva un arco, che passi
 per L, ed M. Col raggio aP , e coi
 centri D, e d si segnino due archi,
 che taglino il precedente in L, ed M.
 Saranno L, ed M i due punti cercati.

Dimostrazione. Confrontando i punti aAE_2P
 di questa Figura 95. coi punti QApBP
 della Figura 3 dall'equazione $(AQ)^2 =$
 $(Ap)^2 + (pQ)^2 - pP \cdot pQ$ appartenente

alla Fig. 3. (§. 17.) si ricaverà l'equazione per questa Figura 93. $(Aa)^2 = (AE)^2 + (Ea)^2 = EP \cdot Ea$. Quindi (§. 17.) $2 = 1 + 3 = EP \cdot \sqrt{3}$. Quindi $2 = EP \cdot \sqrt{3}$; ed $EP = \frac{2}{\sqrt{3}}$. Essendo poi i tre punti E, P, a nella stessa retta (§. 13.), sarà $Pa = Ea - EP = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Si supponga guidata la BE, che tagli in R la Dd: sarà (§. 104.) $BR = \frac{1}{2}$; $RD = \frac{1}{2}\sqrt{3}$; $BE = 2$; quindi la quarta proporzionale alle tre BR, RD, BE sarà $= \frac{1}{2}\sqrt{3} = EM$. Sarà pure (§. 104.) $RE = \frac{1}{2}$, $BD = \sqrt{3}$ (§. 2.). Quindi la quarta proporzionale alle tre BR, BD, RE sarà $= \frac{1}{2}\sqrt{3} = DM$. Saranno dunque le EM, DM della quantità richiesta, perchè il triangolo BEM riesca simile al triangolo BRD (2. lib. 6.). Dunque saranno simili, poichè il punto M non potrebbe cascare in altro luogo (3. lib. 1.). Si proverà nella stessa maniera, che il triangolo BRd è simile al triangolo BEL. Quindi il triangolo BDd è simile al triangolo BML (20. lib. 6.). Dunque anche questo è equilatero. Sono inoltre retti gli angoli REM, BEL eguali agli angoli BRD, BRd, e sono eguali le rette EM, EL. Dunque il triangolo BLM è il cercato.

185. In un cerchio di raggio dato AB in-
Fig. scrivere cinque quadrati eguali, de quali
96. uno sia concentrico al cerchio, e gli al-
tri lo tocchino, avendo ciascuno un lato
comune col quadrato di mezzo.

Soluzione. Si facciano al raggio AB eguali
le corde BC , CD , DE . Si faccia a
 $BD = Ba = Ea$. Ad Aa si facciano
eguali le corde Bf , Bf' . Col raggio
 AB , e col centro a si tagli il cerchio
in G , e si faccia ad Aa eguale la corda
 Gg . Col raggio ga , e col centro g si
descriva un arco aP , e si faccia sotto
esso la corda $aP = aA$. Collo stesso
centro g , e col raggio gA si descriva
un arco Ap sulla direzione dell'arco
 aP . Si faccia ad $aA = Pp$. Si facciano
ora ad Ap eguali le corde Bq , fn ,
 Em , Fl . Collo stesso raggio Ap , e
coi centri B , q , f , n , E , m , F , l si
descrivano degli archi, che si taglino
dentro il cerchio in L , Q , N , M . Sarà
 $LMNQ$ il quadrato centrale, $BLQq$,
 $fQNn$, $ENMm$, $FMLl$ gli altri
quadrati cercati.

Dimo-

Dimostrazione. Se si confrontino i punti a, A, G, B, g di questa Figura coi punti Q, p, A, R, S della Figura 4., si avrà dal §. 21. l'equazione per questa Figura 87. $(ag)' = (aB)^2 + Gg \cdot Aa$. Cioè posto il raggio $AB = 1$, $(ag)' = 3 + 2 = 5$ (§. 27.); quindi $ag = \sqrt{5}$. E' poi $aP = aA = \sqrt{2}$. Ora si ha $ga : aP :: gA : Ap$ (§. 93.), cioè $\sqrt{5} : \sqrt{2} :: 1 : Ap$. Quindi $Ap = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} = Em$. Essendo poi $BCDE$ una semicirconferenza (§. 64.), sarà BmE un angolo retto (31. lib. 3.), quindi $(BE)^2 = (Bm)^2 + (mE)^2$; cioè $4 = (Bm)^2 + \frac{1}{5}$. Quindi $(Bm)^2 = 9 - \frac{1}{5}$, e $Bm = 3\sqrt{\frac{4}{5}} = 3mE$. Dello stesso valore si troverà essere gE , e si dimostrerà esser retti tutti gli altri angoli del quadrilatero $BmEq$, che sono in semicerchio. Dunque esso è un parallelogrammo rettangolo. Iteffamente si dimostra essere un parallelogrammo rettangolo $Flfn$. Se si faccia la corda $Em = k$, sarà mF corda del complemento al quadrante $= k$ (§. 159.), e si avrà $k^2 = 2 - 2k\sqrt{1 - \frac{1}{5}k^2}$. Quindi essendo $k^2 = \frac{1}{5}$, si avrà $k^2 = 2 - 2k\sqrt{\frac{4}{5}} = 2 - 2\sqrt{\frac{2}{5}} = 2 - \frac{4}{5} = \frac{6}{5} = 2k^2$, cioè $(Fm)^2 = (FM)^2 + (Mm)^2$. Quindi l'angolo FmM sarà retto (48. lib. 1.); così gli altri BLl , fQq , ENn . Se poi si chiami x la distanza del punto m dal punto dove cade la perpen-

dicolare da F sopra la Bm , si avrà (13. lib. 1.) $(BF)^2 = (Fm)^2 + (Bm)^2 = 2 Bm \cdot x$, cioè $2 = \frac{4}{1} + \frac{12}{1} = 16x\sqrt{\frac{1}{2}}$. Quindi $x\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}$, e dividendo per $\sqrt{\frac{1}{2}}$, si ha $x = \sqrt{\frac{1}{2}} = mM$. In seguito se si chiami y la perpendicolare, che da F cade sulla Bm , si avrà $y^2 = (Fm)^2 - x^2 = \frac{4}{1} - \frac{1}{4} = \frac{15}{4}$; quindi $y = \sqrt{\frac{15}{4}} = FM$. Quindi si dimostra essere il punto M sulla Bm . Egualmente si dimostra esservi il punto L . Essendo dunque $Bm = 3 Em = Mm + BL + Em$; sarà anche $LM = Em$. Si dimostrano poi dello stesso valore gli altri lati MN , NQ , LQ . Dalle cose dette fin qui resta pur dimostrato essere retti gli angoli ai punti L , M , N , Q esterni al quadrilatero $LMNQ$, dunque lo saranno anche gli interni, e si avranno i cinque quadrati, che si volevano.

PROBLEMA.

186. **D**ati i cinque punti A , B , C , D , E Fig. estremi di un pentagono regolare; trovare i cinque punti a , b , c , d , e , nei quali si taglierebbero le diagonali di esso pentagono.

Soluzione. Col lato del pentagono AB preso per raggio, e coi centri A , B ,

C, D, E si segnino degli archi, che si taglino in a, b, c, d, e . Sarà fatto.

Dimostrazione. Se si suppongano condotte le diagonali, e segnati i lati del pentagono ABCDE, si avrà l'angolo $BAC = BDA$ (29. lib. 3.) $= CAD$. Quindi $Ab = bD$ (6. lib. 1.). Si avrà poi $BbA = bDA + bAD$ (32. lib. 1.) $= BAb + bAD = BAD = ABD$ (5. lib. 1.). Quindi il triangolo ABb sarà isoscele (6. lib. 1.), cioè sarà $AB = Ab = bD$. Dunque ec.

Questa Figura è il pentalfa, ossia l'igia di Pitagora.

PROBLEMA.

187. In un cerchio di raggio dato AB inscrivere sei pentagoni regolari.

Fig.
98.

Soluzione. Si faccia nella circonferenza ad $AB = BC = CD = DE = Ed$. Quindi a $BD = Ba = Ea$. Quindi ad $Aa = BF = Db = db$. Si faccia nella circonferenza a $bF = BP = PQ = QR = RS$. Collo stesso raggio bF , e coi centri B, P, Q, R, S si segnino degli archi, che si taglino in β, p, q, r, s .

Ora col raggio βp , e coi centri β , P si segnino due archi, che si tagliano in c . Collo stesso raggio, e coi centri P , p si segnino due archi, che si tagliano in d . Si avranno due dei pentagoni cercati, cioè $\beta p q r s$ pentagono al centro A , e $\beta p d l'c$, che tocca il cerchio dato in P . Nella stessa guisa si troveranno i vertici, che mancano agli altri quattro pentagoni $p q f Q c$, $q r h R g$, $r s k S i$, $s \beta m B l$.

Dimostrazione. Saranno i punti B, P, Q, R, S estremi di un pentagono regolare inscritto al cerchio dato (§. 40. 128.). Quindi saranno i punti β, p nella diagonale BQ ; i punti p, q nella diagonale PR (§. 186.), ed essendo $Bp = \beta Q$, sarà $B\beta = pQ$. Istessamente si proverà $Pp = qR$, e per essere $BQ = PR$ (27. lib. 3.), sarà anche $B\beta = Pp$; e $\beta p = pq$. Istessamente si proverà, che sono uguali tra loro tutti i lati del pentagono $\beta p q r s$. Si ha poi l'angolo $\beta p q$, cioè $BpR = BPR + PBp$ (31. lib. 1.); ma PBp cioè $PBQ = QPR$. Dunque $\beta p q = BPQ$. Istessamente si dimostra, che gli altri angoli del pentagono $\beta p q r s$ sono eguali agli angoli del pentagono $BPQRS$. Dunque sono entrambi regolari. Si avrà inoltre l'angolo

QBR, formato da due diagonali del pentagono BPQRS, che è l'angolo βBs eguale all'angolo βqs formato da due diagonali del pentagono $\beta p q r s$ (20. lib. 6.). Quindi essendo isosceli entrambi i triangoli μBs , βqs , avranno eguali tra loro anche gli angoli alla base comune βs (5. 32. lib. 2.); quindi anche i triangoli saranno in tutto eguali (26. lib. 1.). Quindi i triangoli Bmp , βpq avendo tutti i lati eguali tra loro, avranno eguali anche gli angoli (8. lib. 1.), come pure i triangoli Bis , srq . Quindi tutti i lati, e gli angoli del pentagono $Bmpsi$ saranno eguali ai lati, e agli angoli del pentagono $\beta p q r s$, e però entrambi saranno regolari. Lo stesso si dimostra degli altri pentagoni $\beta c P d p$, $p c Q f q$, $q g R h r$, $r i S k s$. Dunque ec.

188. Il punto b sarà centro del pentagono $\beta m B i s$, e la distanza bB raggio del cerchio circoscritto ad esso pentagono, e agli altri eguali, come dimostreremo subito; il che aggiunge una nuova bella proprietà al punto b già rimarcato tante volte in questa Geometria. Poichè oltre alle divisioni io estrema, e media ragione, che per esso nascono nel diametro BAE (5. 45. 46.), e la determinazione fatta per esso della bF lato del pentagono inscritto al cerchio di raggio AB (5. 40.), e della bA lato del decagono in-

scritto allo stesso cerchio (§. 41.); si ha ancora Bb raggio del cerchio circoscritto ai sei pentagoni, che si possono inscrivere al maggior cerchio di raggio AB , come nel presente Problema. Difatti posto il raggio $AB = 1$, si ha $Ab = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$ (§. 180.); essendo poi $(BE)^2 = (BQ)^2 + (QE)^2$ (31. lib. 3.) $= (BQ)^2 + (Ab)^2$; oc verrà $BQ = \sqrt{\left(\frac{5 + \sqrt{5}}{2}\right)}$. Si ha poi $\beta Q = BP = bF = \sqrt{\left(\frac{5 - \sqrt{5}}{2}\right)}$ (§. 181.). Quindi $BQ : \beta Q :: BQ \cdot \beta Q : (\beta Q)^2 :: \sqrt{5} : \frac{5 - \sqrt{5}}{2} :: 1 : \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1) :: BA : bA$. Quindi $BQ : BQ - \beta Q :: BA : BA - bA$, cioè $BQ : B\beta :: BA : Bb$. Saranno dunque le due diagonali dei pentagoni $BPQRS$, $Bm\beta sl$ tra loro come $BA : bA$. Essendo dunque BA raggio del primo pentagono; sarà Bb raggio del secondo (20. lib. 6.).

PROBLEMA.

189. **D**ati i vertici di un esagono regolare $BCDEdc$; trovare i punti l, m, n, g, p, q , nei quali si tagliano le sue diagonali, che non passano pel centro.

Soluzione. Si faccia $a BD = Ba = Ea$; quindi $a BC = BA = CA = Ba$; ad $a A = aa$; ad $a B = aP = AP$. Ora col raggio aP , e coi centri B, C si segnino due archi, che si taglino in I ; coi centri C, D altri due, che si taglino in m , e così via via. Saranno quelli i punti cercati.

Dimostrazione. Si supponga, che le diagonali indicate si taglino in I, m, n, g, p, q . Essendo l'angolo $BDe = DeE$ (29. lib. 3.), sarà BD parallela a eE (28. lib. 1.). Sarà dunque il triangolo CIm simile al triangolo CeE (2. 5. lib. 6.), e però equilatero. Istessamente lo sarà il triangolo BIq simile al triangolo BDd . Essendo poi il triangolo CeE eguale al triangolo BdD per avere i lati eguali a quelli di esso (§. 2.) (8. 4. lib. 1.), ed essendo il lato BD , e quindi Im egualmente distante dal lato eE , che il lato Ce , e quindi qI dal lato dD (14. lib. 3.), se si sovrapponga il triangolo BdD al triangolo CeE , la retta qI cascherà sulla retta Im , e le sarà eguale. Ma è $BI = Iq$. Dunque $BI = Im$. Istessamente si dimostra, che è $Dm = mI$. Dunque è $BI = \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ (ponendo il raggio del cerchio $BC = AB = 1$) (§. 2.). Istessamente

$Cl = \frac{1}{2}V\frac{1}{2}$. Ma si sono appunto prese $Bl = Cl = aP = \frac{1}{2}V\frac{1}{2}$ (§. 184.). Dunque l è uno dei punti cercati. Lo stesso si dimostra degli altri punti m, n, g, p, q . Dunque ec.

PROBLEMA.

190. Nel cerchio di raggio dato AB in Fig. scrivere sette esagoni regolari, uno de' quali sia concentrico al cerchio, e gli altri siano disposti intorno ad esso.

Soluzione. Si faccia nella circonferenza del cerchio dato ad $AB = BC = CD = DE = Ed$. Quindi a $DB = DV = dV$. Col raggio CV , e coi centri C , ed A si segnano due archi, che si taglino in P . Collo stesso raggio PC , centro P si tagli la circonferenza del cerchio dato in d . Sarà dd il lato degli esagoni da inscriverti, i quali si inscriviranno facilmente uno presso l'altro. Poichè collo stesso lato dd preso per raggio, e coi centri d, d si segnano due archi, che si taglino in e . Collo stesso

raggio, e col centro α si descriva un cerchio, dentro il quale si inscriva un esagono regolare (15. lib. 4.) $d\alpha mnpq$. Collo stesso raggio, e col centro A si descriva un cerchio, che passerà per np . In esso si descriva l'esagono, che ha per uno dei lati pn . Sopra i lati di questo esagono si descrivano gli altri esagoni, come si è fatto da prima sul lato $d\alpha$, e sarà fatto quanto volevasi.

Dimostrazione. Posto per brevità $AB = 1$; sarà $CP = CV = \sqrt{7}$ (§. 100.) $= AP$. Sarà poi $AP : A\delta :: A\delta : \delta d$ (§. 86.); cioè $\sqrt{7} : 1 :: 1 : \delta d$; quindi $\delta d = \sqrt{\frac{1}{7}}$. Si suppongano per un momento inscritti gli esagoni cercati, e sia l'incognita $d\delta$ lato di essi $= x$; si divida essa per metà in v , e si guidi la Av , che le sarà perpendicolare (§. 83.), e passerà per α centro dell'esagono, di cui è lato la $d\delta$, tagliando pure per metà in μ il lato pn dell'esagono centrale. Essendo nel triangolo equilatero Apn , $pn : A\mu :: 1 : \frac{1}{2}\sqrt{3}$ (§. 104.); si avrà $x : A\mu :: 1 : \frac{1}{2}\sqrt{3}$, quindi $A\mu = \frac{1}{2}x\sqrt{3}$, e quindi $Av = 3 A\mu = \frac{3}{2}x\sqrt{3}$; è poi $dv = \frac{1}{2}x$. Essendo poi $1 = (Ad)^2 = (Av)^2 + (dv)^2$, sarà $1 = \frac{9}{4}x^2 + \frac{1}{4}x^2 = 7x^2$; quindi $x^2 = \frac{1}{7}$, ed $x = \sqrt{\frac{1}{7}}$, della quale grandezza si è appunto determinata la $d\delta$ nella Soluzione del

Problema, come si è dimostrato quì sopra.
Dunque ec.

Questo Problema si trova in Pappo Lib. 8.
Probl. 15. Prop. 19. sciolto colla riga, e col
compasso non più semplicemente di così. Egli
vi ha pure aggiunta una costruzione meccanica.

191. Noi crediamo di avere omai adempito quanto
abbiamo promesso ai §§. 6., e 7. E quanto
al primo punto abbiamo già dati tutti gl'
elementi della *Geometria del Compasso*; cioè
tutti que' Problemi, che bastano a potere col
solo compasso senza la riga trovare tutti que'
punti, che si possono trovare col compasso, e
colla riga insieme. Per dimostrar questo (§. 71.)
si osservi primo, che per via della *Geometria*
Elementare i punti d'un Problema si trovano
o colla sezione degli archi fra loro, e questa
è tutta cosa propria della *Geometria del com-*
passo, o colle sezioni degli archi, e delle
rette, o delle rette fra loro, e tutto questo
articolo vien ad essere compreso dal Libro
Settimo §. 110., e seguenti. Una retta poi
qualunque, che sia necessaria alla Soluzione
d'un Problema, viene determinata dalla gran-
dezza, e dalla posizione. Per rapporto alla
grandezza abbiamo insegnato ad ingraodire,
diminuire, dividere qualunque grandezza fi-
nita in qualunque numero di parti nel Libro
Terzo §. 64., e seguenti, e nel Libro Quarto
§§. 72., 73. e 74.; a trovare poi le terze, le
quarte, le medie proporzionali, così parimente

a dividere una retta in qualunque ragione data, nel Libro Quinto §. 86., e seguenti. Riguardo alla posizione delle rette, essa si determina per via della posizione di due punti per ciascuna; ora servirà il Libro Quarto §. 76., e seguenti a ritrovare i punti per ogni caso delle perpendicolari, e delle parallele. Per collocar le rette tra loro ad ogni altro angolo dato per via di due punti, somministrerà quanto è necessario il Libro Ottavo §. 113., e seguenti. La divisione della circonferenza del cerchio, e d'ogni arco in ogni maniera possibile alla Geometria Elementare è esaurita nel Libro Secondo §. 27., e seguenti. Dopo tutto ciò non veggio quale altro elemento si possa desiderare. Quanto poi riguarda la scelta dei Problemi, che abbiamo qui raccolti, lasceremo che i Matematici giudichino, se in un gran numero di casi utili, o dilettevoli non sia pregio dell'opera non solo per la precisione del risultato, ma ancora per la speditezza della costruzione abbandonare la riga, e servirsi del solo compasso fino a quel termine, che trovati tutti i punti necessarj al Problema, si abbia, se ciò bisogna, a condurre da un punto all'altro una, o più rette, le quali certo col solo compasso segnar non si possono, ed abbisognano della riga.

DELLA GEOMETRIA DEL COMPASSO

LIBRO DUODECIMO.

PROBLEMI PER APPROSSIMAZIONE.

192. **T**utti i Problemi superiori al secondo grado non si possono sciogliere geometricamente colla sola riga, e col compasso; ma richiedono intersezioni di curve coniche, o di gradi superiori; quindi non si ponno risolvere nemmeno colla sola Geometria del Compasso esattamente. Gli strumenti per descrivere la cicloide, la concoide, la cissoide, la trattoria, ed altre tali curve, che servono alla risoluzione di que' Problemi, benchè inventati con grande ingegno, e riusciti nella pratica eleganti, e spediti, non ostante quando non si tratti di avere tutto l'andamento di quella curva, alla quale sono destinati, ma solo di ottenere un punto coll' intersezione di quella con altre linee, lasciano certo in pratica tale dubbio di piccoli errori talvolta non ben calcolabili, che si avrà in moltissimi

casì a preferire all' esattezza teorica di que' metodi un' approssimazione pratica abbastanza grande d' una costruzione fatta col compasso, e colla riga. In questi casi dico, che il maggior numero delle volte sarà preferibile ancora una risoluzione ottenuta col solo compasso. Gli esempi lo mostreranno a chi vorrà fare il confronto delle nostre Soluzioni colle già conosciute.

193. Non essendovi finora metodo generale per ottenere colla Geometria Elementare queste approssimazioni; non si dovrà aspettare, che nemmeno io ne proponga uno per la mia Geometria del Compasso. Io non chiamo metodo Geometrico di approssimazione quello di ottenere prossimamente un valore coll' ajuto d' una di quelle scale, che si dicono geometriche, poichè all' uso di essa dovendo precedere un calcolo aritmetico; il metodo stesso si deve piuttosto chiamare aritmetico. Si supponga, per esempio, che si voglia la radice cubica del numero 2; l' estrazione, che si vuol fare aritmeticamente di questa radice per poter poi prendere le parti decimali, o rotti di altra natura sopra una scala geometrica col compasso, ad oggetto di duplicare qualche cubo, fa sì, che il ripiego sia di ragione dell' Aritmetica, piuttosto che della Geometria.

194. Io non ho potuto specolare finora altro

mezzo di ottenere prossimamente la Soluzione di molti Problemi utili, superiori al secondo grado, fuori di quello di trovare varj generi, e come classi di costruzioni di figure elementari: quindi di assoggettare al calcolo il più gran numero, che si possa, dei casi particolari pressochè innumerabili, che ne risultano. Tra essi scegliere quelli, che servono meglio all'intento, e adoperarli a risolvere il Problema.

195. Di questi generi, e quasi classi di costruzioni io ne ho esaminate molte, e tengo a parte delle ricerche sulle medesime. La più semplice classe, e quella, della quale quasi unicamente faremo uso in quest'ultimo Libro della nostra Geometria, è fondata sui tre punti memorabili a, b , ed c Fig. 9., 11. e 12. (§. 59.), che ci hanno già servito tanto ne' Libri antecedenti, e sui quali venghiamo ad esporre le dodici equazioni da noi promesse (§. 59.).

196. Sia il punto Z considerato per un punto Fig. qualunque preso sul quarto di circonferenza

12. BF nella Figura 12. costruita come nel Libro Secondo, e nell'altro quarto Bf sia il punto 1, cosicchè si abbia $B_1 = BZ$. Si avrà (§§. 20. e 21.)

$$(A) \dots (aZ)^2 = (aB)^2 - Z_1 \cdot Aa$$

$$(B) \dots (bZ)^2 = (bB)^2 + Z_1 \cdot Ab$$

$$(E) \dots (eZ)^2 = (eB)^2 - Z_1 \cdot Ae$$

197. Se vogliamo le equazioni per le distanze dei tre punti a , b , ed c dal punto z , non si avranno, che a cambiare i segni nel secondo membro delle equazioni antecedenti, e si avrà (§§. 20. e 21.)

$$(A') \dots (az)^2 = (aB)^2 + zZ \cdot Aa$$

$$(B') \dots (bz)^2 = (bB)^2 - zZ \cdot Ab$$

$$(E') \dots (cz)^2 = (cB)^2 + zZ \cdot Ac$$

198. Essendo Zz corda dell'arco doppio di BZ $\equiv 2 \text{ sen. } BZ$; ed essendo nella supposizione di $AB = 1$, che noi sempre riporteremo, $(aB)^2 = (BD)^2 = 3$ (§. 2.); $(Aa)^2 = 2$

$$(\S. 27.); (Bb)^2 = \frac{5 - \sqrt{5}}{2} \quad (\S. 181.);$$

$(Ac)^2 = 2 - \sqrt{2}$ (§. 38.), quindi $(cB)^2 = (AB)^2 + (Ac)^2 = 3 - \sqrt{2}$; $Ab = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$ (§. 180.); se si faccia $aZ = a$, si avrà $(A'') \dots a^2 = 3 - a \text{ sen. } A\sqrt{2}$; comprendiamo sotto questa equazione anche il caso, che l'arco A sia negativo, cioè Bz , nel quale il segno $-$ prefisso a $a \text{ sen. } A\sqrt{2}$ si cambia in $+$.

199. Il valore di a può sempre essere quello d'una qualche corda del cerchio BDd , fuori che nel caso, che la distanza az espressa per a superi il valore di 2. Per calcolare più facilmente il valore di a in questi casi, essendo $\sqrt{2} \equiv BF \equiv 2 \text{ sen. } 45^\circ$, e $1 \text{ sen. } A \text{ sen. } 45^\circ \equiv \cos.(A - 45^\circ) - \cos.(A + 45^\circ) \equiv \cos.(45^\circ - A) - \text{sen.}(45^\circ - A)$ (§. 158.),

si avrà

$$(*) a' = 3 - 2 \cos. (45^\circ - A) + 2 \sin. (45^\circ - A).$$

200. Negli altri casi, oci quali a è minore di 2, chiamando A' quell'arco, del quale a è

corda, si avrà $\frac{a'}{4} = \sin. \frac{1}{2} A' = \frac{1 - \cos. A'}{2}$

$$\begin{aligned} (\S. 155.) &= \frac{1}{4} - \sin. A' \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4} - \\ &\sin. A' \cos. 45^\circ; \text{ quindi riducendo } \cos. A' = \\ &2 \sin. A' \cos. 45^\circ - \frac{1}{2}; \text{ quindi ancora } (\S. 156.) \\ \cos. A' &= \sin. (A + 45^\circ) + \sin. (A - 45^\circ) \\ &\quad - \sin. 30^\circ \end{aligned}$$

ovvero

$$(1) \cos. A' = \cos. (45^\circ - A) - \sin. (45^\circ - A) \\ \quad - \sin. 30^\circ.$$

201. Se si vuole far servire quella equazione (1) alla divisione della circonferenza in quelle parti, che non si possono ottenere con precisione, si introdurrà in luogo di A un arco preciso, per esempio la ventesima parte della Fig. circonferenza $= 18^\circ$, supponendo $BZ = 18^\circ$.

11. e si avrà $\cos. A' = \cos. 27^\circ - \sin. 27^\circ - \sin. 30^\circ$.

$$\text{Ora } \sin. 27^\circ = 0,4539905$$

$$\sin. 30^\circ = 0,5$$

$$\underline{0,9539905}$$

$$\cos. 27^\circ = 0,8910065$$

$$\text{Quindi } \cos. A' = -0,0629840$$

Si trova poi sulle tavole $0,0629840 =$

$$\sin. 3^\circ 36' \frac{1935}{2903}. \text{ Ora essendo } \frac{1935}{2903} \cos. \\ \text{vicino}$$

vicino al valore di $\frac{2}{3}$, che non v'è l'errore nemmeno d'una unità intera nell'ultima cifra del numero 1935, si potrà prendere 0,0629840 pel seno di $3^{\circ} 36' 40''$ senza poter decidere colle tavole comuni, se vi sia pure l'errore di un minuto terzo. Quindi l'arco A' , che ha questo coseno negativo, sarà $= 93^{\circ} 36' 40''$, e di quest'arco sarà corda la distanza aZ posto $BZ = 18^{\circ}$. Applicando dunque la distanza aZ presa sul compasso per corda alla circonferenza, si determinerà un tal arco $= 93^{\circ} 36' 40''$, assai prossimamente.

202. Per indagare l'errore, che sfugge ai numeri delle tavole comuni, si consideri, che essendo il seno di 18° eguale alla metà della corda della decima parte della circonferenza, cioè $= \frac{1}{2} Ab = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$, e il coseno di $45^{\circ} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, l'equazione $\cos. A' = 2 \sin. A \cos. 45^{\circ} = \frac{1}{2}$ del §. 200, dà $\cos. A' = \frac{1}{2}\sqrt{2}(\sqrt{5} - 1) = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(\sqrt{10} - \sqrt{2}) - \frac{1}{2} = 0,0629839824$. Calcolato poi con più cifre anche il seno di $3^{\circ} 36' 40''$, si trova $= 0,062984061154$. Attenendosi solamente a otto cifre decimali si trova sen. $3^{\circ} 36' 39'' = 0,06297921$. La differenza per $1''$, ossia per $60'''$ è 485. Se dunque 485 dà $60'''$, 8 darà $\frac{60}{8}'''$, non darà dunque un intero minuto terzo. Dunque l'arco, del quale è corda la distanza aZ , non è maggiore di $93^{\circ} 36' 40''$ di un intero minuto terzo.

203. Posto tutto ciò ecco l'uso, che si potrebbe fare di questo valore per la divisione antica Fig. del cerchio. Lasciamo stare, che potrebbe ^{12.} servire a dividere in tre un minuto primo in que' cerchj, dove fossero notati i minuti primi, poichè si troverebbero i $40''$, cioè $\frac{1}{3}'$ tra un minuto primo, e l'altro seguente, e ciò senza l'errore di un minuto terzo; esso può anche servire a trovare la terza parte di un grado. Poichè essendo l'arco $BN = 90^\circ$, ed $Np = 3^\circ$ (f. 31. 43.), se preso $BZ = Kp$, nel qual caso uscirà l'arco $BZ = 18^\circ$ (f. 31.), col raggio aZ fatto centro in c si descriverà un arco, esso taglierà la circonferenza tra p , e P in un punto distante da p di $36' 40''$ col piccolo errore calcolato. Si chiami y quello punto, e si triplichi per esempio l'arco $Ny = 3^\circ 36' 40''$. Avremo un arco $= 10^\circ 50'$ senza l'errore di tre minuti terzi, e se questa triplicazione si è fatta da N verso G , caderà l'ultima divisione tra π , e Φ . Si chiami π il punto, dove esso cade, e sicchè sia $N\pi = 10^\circ 50'$. Si chiami poi μ il punto, che è alla metà dell'arco $\pi\Phi$ ottenuto col f. 38. Sarà l'arco $\mu\nu = 20'$ senza l'errore di tre minuti terzi, cioè si avrà ottenuto un terzo di grado antico con tanta precisione, ch'io non so, se abbiassi per la pratica a desiderarsene una maggiore.

204. Noi abbiamo tratto quest'esempio dalla lista di tutti i valori di $\cos. A'$ calcolati introducendo nell'equazione (1) in luogo di A successivamente 90° , $88^\circ 30'$, 87° , e così in seguito fino a 0° , quindi $-1^\circ 30'$, -3° ec. fino a $-19^\circ 30'$ inclusivamente; oltre il qual caso non ha più luogo l'equazione (1) venendo i suoi valori maggiori di 1.

205. Ora proseguiremo a trovare le altre equazioni. Ogni distanza del punto b dai punti della circonferenza riuscendo minore del diametro z potrà essere corda di un arco. Quest'arco, di cui la bZ è corda si chiami B' ; si

avrà $\frac{bZ}{z} = \text{sen. } \frac{1}{2} B'$, e chiamando B l'arco

BZ , si avrà $Zz = z \text{ sen. } B$, quindi dall'equazione (B) del §. 196. divisa per 4 risulterà

$$\text{sen.}^2 \frac{1}{2} B' = \frac{1 - \cos. B'}{2} \quad (\S. 155.) = \frac{5 - \sqrt{5}}{8}$$

$$+ \text{sen. } B = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}. \text{ Quindi } \cos. B' = 1 -$$

$$\left(\frac{5 - \sqrt{5}}{4} \right) - \text{sen. } B \frac{\sqrt{5} - 1}{2} = 1 -$$

$$2 \text{ sen.}^2 36^\circ - 2 \text{ sen. } B \text{ sen. } 18^\circ = \cos. 72^\circ -$$

$$\cos. (B - 18^\circ) + \cos. (B + 18^\circ) \quad (\S. 155.$$

$$158.). \text{ Si avrà dunque}$$

$$(2) \cos. B' = \text{sen. } 18^\circ + \cos. (B + 18^\circ) - \cos. (B - 18^\circ),$$

206. Parimente se si chiami E' l'arco, del quale è corda la cZ , ed E l'arco BZ , si avrà dall'equazione (E) (§. 196.)

$$\text{sen. } \frac{1}{2} E' = \frac{1 - \cos. E'}{2} = \frac{3 - \sqrt{2}}{4}$$

$$\text{sen. } E = \frac{\sqrt{(2 - \sqrt{2})}}{2}. \text{ Quindi ne viene } \cos. E'$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} + 2 \text{sen. } E \frac{\sqrt{(2 - \sqrt{2})}}{2} = \text{sen. } 45^\circ$$

$$- \text{sen. } 30^\circ + 2 \text{sen. } E \text{sen. } 22^\circ 30'. \text{ Quindi finalmente}$$

$$(3) \quad \cos. E' = \text{sen. } 45^\circ - \text{sen. } 30^\circ \\ + \cos. (E - 22^\circ 10') \\ - \cos. (E + 22^\circ 30').$$

207. Per via di queste tre equazioni coll'ajuto delle tavole dei seni, e dei coseni naturali dato un arco A , B , od E per via di semplici addizioni, o sottrazioni si avranno i coseni, e quindi gli archi A' , B' , ed E' , dei quali riescono corde le distanze aZ , bZ , cZ , le quali esse stesse si conosceranno duplicando il seno della metà degli archi A' , B' , ed E' .

208. Reciprocamente se sia la distanza aZ eguale ad una corda d'un arco noto A' , e si cerchi di che arco diventerà corda la Zz , ossia di quanti gradi riuscirà l'arco BZ , che ne è la metà, ed è $= A$; dall'equazione (§. 198.)

$$a' = 3 - 2 \text{sen. } A \sqrt{2},$$

$$\text{si ricaverà } \text{sen. } A = \frac{3 - a'}{2 \sqrt{2}}, \text{ e sostituendo il}$$

valore di $a^2 = 4 \operatorname{sen.}^2 \frac{1}{2} A' = 2 - 2 \cos. A'$

(§. 155.), avremo $\operatorname{sen.} A = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \cos. A' \sqrt{\frac{1}{2}} = \operatorname{sen.} 30^\circ \operatorname{sen.} 45^\circ + \cos. A' \operatorname{sen.} 45^\circ$, e quindi (§. 156. 158.) essendo $\operatorname{sen.} (45^\circ + A')$
 $= \cos. (45^\circ - A')$

(4) . . $\operatorname{sen.} A = \frac{1}{2} [\operatorname{sen.} 45^\circ + \operatorname{sen.} (45^\circ + A') + \cos. (45^\circ - A')]$.

107. litteſſamente ſe ſia noto l'arco B' , di cui è corda la diſtanza bZ , e ſi cerchi l'arco $B = bZ$ per via della Zz , che è corda di $2B$; moltiplicando l'equazione (B) (§. 196.) per

$\sqrt{5} + 1$, per eſſere $(bB)^2 = \frac{5 - \sqrt{5}}{2}$, ed

$Ab = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$, avremo $(bZ)^2 \cdot (\sqrt{5} + 1) = 2\sqrt{5} + 4 \operatorname{sen.} B$, e ſoſtituendo il valore di $(bZ)^2 = 4 \operatorname{sen.}^2 \frac{1}{2} B' = 2 - 2 \cos. B'$ (§. 155.), ſi avrà dopo fatte le riduzioni

$\operatorname{sen.} B = \frac{1}{2} - \cos. B' \left(\frac{\sqrt{5} + 1}{4} \right)$. Ora eſ-

ſendo Bb il lato del pentagono =

$\sqrt{\left(\frac{5 - \sqrt{5}}{2} \right)}$ corda di 72° , ſarà

$\frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{5 - \sqrt{5}}{2} \right)} = \operatorname{sen.} 36^\circ$. Quindi

$\frac{1}{4} \cdot \frac{5 - \sqrt{5}}{2} = \operatorname{sen.}^2 36^\circ$; quindi $1 - \operatorname{sen.}^2 36^\circ$

$= \cos.^2 36^\circ = \operatorname{sen.}^2 54^\circ = \frac{6 + 2\sqrt{5}}{16} =$

$\left(\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right)^2$; quindi risulterà $\text{sen. } B = \frac{1}{2} =$

$2 \cos. B' \text{ sen. } 54^\circ$, e finalmente (§. 156.)

$$(5) \text{ sen. } B = \text{sen. } 30^\circ = \text{sen. } (54^\circ + B') \\ = \text{sen. } (54^\circ - B').$$

210. Nella stessa maniera se sia noto l'arco E' , di cui è corda la distanza eZ , e si cerchi il grado dell'arco $BZ = E$, eguale alla metà dell'arco, di cui è corda $Z_2 = 2 \text{ sen. } E$, sostituendo nell'equazione (E) (§. 196.) il valore di $(eZ)^2 = 2 - 2 \cos. E'$, e gli altri valori di $(eB)^2 = 3 - \sqrt{2}$; $Ac = \sqrt{2 - \sqrt{2}} = 2 \text{ sen. } 22^\circ 30'$ (§. 198. 38.), avremo

$$2 \text{ sen. } E \sqrt{2 - \sqrt{2}} = 2 \cos. E' + 1 - \sqrt{2}, \\ \text{e moltiplicando per } \sqrt{2 + \sqrt{2}} \sqrt{2}, \text{ ne} \\ \text{verrà } 4 \text{ sen. } E = 2 \cos. E' \sqrt{2 + \sqrt{2}} \sqrt{2} \\ - (\sqrt{2} - 1) \sqrt{2} \sqrt{2 + \sqrt{2}} = \\ 2 \cos. E' \sqrt{2 + \sqrt{2}} \sqrt{2} - (2 - \sqrt{2}) \sqrt{2 + \sqrt{2}} \\ = 2 \cos. E' \sqrt{2 + \sqrt{2}} \sqrt{2} - \sqrt{2 - \sqrt{2}} \sqrt{2}, \\ \text{e dividendo per } 4, \text{ e considerando, che è} \\ \sqrt{2 + \sqrt{2}} = 2 \text{ sen. } 67^\circ 30' \text{ (§. 37.),} \\ \sqrt{2} = 2 \text{ sen. } 45^\circ, \text{ si avrà (§. 156. 157. 158.)} \\ \text{sen. } E = 2 \cos. E' \text{ sen. } 67^\circ 30' \text{ sen. } 45^\circ - \\ \text{sen. } 22^\circ 30' \text{ sen. } 45^\circ; \text{ ossia } \text{sen. } E = \\ \cos. E' [\cos. (67^\circ 30' - 45^\circ) - \cos. (67^\circ 30' + 45^\circ)] \\ = \text{sen. } 22^\circ 30' \cdot \text{sen. } 45^\circ, \text{ ossia } \text{sen. } E = \\ \cos. E' \cos. 22^\circ 30' + \cos. E' \text{ sen. } 22^\circ 30' \\ = \text{sen. } 22^\circ 30' \text{ sen. } 45^\circ.$$

ossia finalmente

$$(6) \operatorname{sen.} E = \frac{1}{2} \left\{ \begin{array}{l} \cos. (E' + 22^{\circ} 30') \\ + \operatorname{sen.} (E' + 22^{\circ} 30') \\ + \operatorname{sen.} 22^{\circ} 30' \\ + \cos. (E' - 22^{\circ} 30') \\ - \operatorname{sen.} (E' - 22^{\circ} 30') \\ - \cos. 22^{\circ} 30' \end{array} \right\}$$

211. Così dalle tre equazioni (A), (B), ed (E) ne abbiamo ricavate sei, per mezzo delle quali da archi dati possiamo ricavare nuovi archi coll'ajuto dei soli tre punti a , b , ed c , e insieme le nuove loro corde.

212. Potendo essere infiniti gli archi dati, sono ancora infiniti i casi di ciascuna di queste equazioni. Ma se non si vogliamo prevalere che degli archi, che si possono trovare per mezzo degli stessi tre punti a , b , ed c , essi sarebbero 120 per ogni equazione, quando per alcuna di esse non vi fossero alcuni limiti particolari. Difatti potendosi per via di quei tre punti dividere la circonferenza in 240 parti eguali (§. 57.), e per conseguenza la semicirconferenza in 120, saranno 60 i punti Z , e 60 i z , che presi insieme determinerebbero 120 casi per ogni equazione. Ma alcuna di esse avrà dei limiti particolari.

213. Per esempio s'io volessi prendere sul compasso la corda di 3° , cioè della centovesima parte della circonferenza (§. 42.), e collo-

cando la punta del compasso in a segnare un arco, esso non potrebbe tagliare la circonferenza in alcun punto Z , essendo quella corda minore della distanza $aF = \sqrt{2} - 1$. Non si potrà dunque nell'equazione (4) introdurre in luogo di A' l'arco di 3° , e se ciò si volesse fare, ne verrebbe un valore maggiore dell'unità, cioè assurdo per sen. A . Per vedere, quale sia il primo arco, che si potrà introdurre in luogo di A' tra gli archi della serie $1^\circ 30'$, 3° , $4^\circ 30'$ ec., si osservi che che arco sia corda la distanza aF , che è la minima del punto a dal cerchio, ed è $= \sqrt{2} - 1 = 2 \text{ sen. } 45^\circ - 1 = 0,91421356 = \cos. 23^\circ 54' +$.

Dunque il primo arco, che si possa adoperare di quelli, che si trovano per via dei tre punti a , b , ed c , sarà l'arco di 24° . Dietro a esso poi si potranno adoperare tutti gli altri in serie $25^\circ 30'$, 27° , $29^\circ 30'$ ec. fino a 180° ; poichè le corde di tutti quelli possono essere distanze dal punto a da qualche punto Z , ovvero 1 della circonferenza.

214. Più limitate sono le equazioni (5), e (6). Poichè nella (5) non si ponno impiegare archi B' , che abbiano la corda minore di bf nè maggiore di bF ; egualmente nella (6) sono esclusi tutti gli archi E' di corda minore di cf , e maggiore di cF .

215. Vedremo in seguito i casi, nei quali ric-

scono utili alcuni di quelli valori per la divisione del cerchio, o per qualche altro Problema, che non si possa sciogliere se non per approssimazione, scegliendo quelli da tutta la lista calcolata, che danno maggior avvicinamento al vero valore, che si cerca, e nello stesso tempo si sciolgono con sezioni di archi meno lontane dall'angolo retto.

216. Intanto per ottenere tutti i vantaggi possibili dai tre punti a , b , ed c senza introdurre punti nuovi, ricaveremo dalle tre equazioni (A), (B), ed (E) altre sei equazioni per avere nuovi valori di archi, e di corde.

217. Se sia l'arco BZ un arco conosciuto, per esempio uno di quelli, che si ottengono coi Problemi del Secondo Libro, e si chiami B ; e si prenda la distanza bZ sul compasso, e si porti da a a qualche altro punto Z' , che determini un altro arco $BZ' = A$, si può ricavare dal confronto delle due equazioni (A), e (B) una nuova equazione, che lo faccia conoscere. Poichè se in quelle due equazioni si farà $bZ = aZ'$; facendo nella (A) $Z_1 = 2 \text{ sen. } A$, e nella (B) $Z_1 = 2 \text{ sen. } B$, si avrà $(aB)^2 - 2 \text{ sen. } A \cdot Aa = (bB)^2 + 2 \text{ sen. } B \cdot Ab$,

$$\text{ossia } 3 - 2 \text{ sen. } A \sqrt{2} = \frac{5 - \sqrt{5}}{2}$$

+ $\text{sen. } B (\sqrt{5} - 1)$ (§. 198.), e liberando

$$\text{sen. } A, \text{ avremo } \text{sen. } A = \frac{\sqrt{5} + 1}{4} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} =$$

$$2 \operatorname{sen.} B \frac{(\sqrt{5}-1)}{4} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} = \operatorname{sen.} 54^{\circ} + \operatorname{sen.} 45^{\circ} \\
= 2 \operatorname{sen.} B \operatorname{sen.} 18^{\circ} + \operatorname{sen.} 45^{\circ} \\
(\S. 209.) = \frac{1}{2} (\cos 9^{\circ} + \operatorname{sen.} 9^{\circ}) \\
= \operatorname{sen.} B (\cos. 27^{\circ} - \operatorname{sen.} 27^{\circ}) \quad (\S. 158.) \\
\text{quindi } (\S. 155. \text{ e segg.})$$

$$(7) \operatorname{sen.} A = \frac{1}{2} \left\{ \begin{array}{l} \cos. 9^{\circ} + \operatorname{sen.} 9^{\circ} \\ + \cos. (B - 27^{\circ}) \\ - \operatorname{sen.} (B - 27^{\circ}) \\ - \cos (B - 63^{\circ}) \\ + \operatorname{sen.} (B - 63^{\circ}) \end{array} \right\}$$

218. Anche qui per B non si potranno prendere tutti gli archi, ma solamente quelli, che diano una distanza bZ, ovvero b₁ non minore di aF.

219. Ora se sia conosciuto un arco BZ, che si chiami A, e presa sul compasso la distanza aZ si porti ella da b a qualche punto Z' della stessa circonferenza, che determini l'arco BZ' = B; si conoscerà quest'arco B, e la sua corda, se occorra, se nell'equazione $\operatorname{sen.} A$

$$= \frac{\sqrt{5}+1}{4} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} - 2 \operatorname{sen.} B \frac{(\sqrt{5}-1)}{4} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}}$$

(§. 217) si libererà $\operatorname{sen.} B$. Si moltiplichi ella equazione pel fattore $2(\sqrt{5}+1)\sqrt{2}$, ed avremo $2 \operatorname{sen.} A (\sqrt{5}+1)\sqrt{2} = 3 + \sqrt{5}$

$$= 4 \operatorname{sen.} B; \text{ onde avremo } \operatorname{sen.} B = \frac{3 + \sqrt{5}}{4}$$

$$= 4 \operatorname{sen.} A \frac{\sqrt{5}+1}{4} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} = 2 \operatorname{sen.} 54^{\circ} -$$

4 sen. A sen. 34° , sen. 45° (§. 209.), e adoperate come supra le equazioni de' §§. 155. e segg., risulterà in fine

$$(8) \text{ sen. } B = 1 + \text{sen. } 18^\circ - \text{sen. } (A + 9^\circ) + \cos. (A + 9^\circ) - \text{sen. } (A - 9^\circ) - \cos. (A - 9^\circ).$$

210. In questa equazione (8) non si potranno impiegare per A quegli archi BZ, che danno una distanza aZ maggiore di bF.

211. Ora se nell'equazione (A) (§. 196.) si faccia $Z_1 = 2 \text{ sen. } A$, e nell'equazione (E) un'altra $Z_1 = 2 \text{ sen. } E$; facendo inoltre in queste due equazioni $(aV)^2 = (eZ)^2$, si avrà dopo le sostituzioni dei valori (§. 198.)

$$3 - 2 \text{ sen. } A V^2 = 3 - V^2 - 2 \text{ sen. } E V (2 - V^2);$$

$$\text{sen. } A = \frac{1}{2} + 2 \text{ sen. } E \frac{V(2 - V^2)}{2} \cdot V^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{2} + 2 \text{ sen. } E \text{ sen. } 22^\circ 30' \text{ sen. } 45^\circ = \frac{1}{2} + \text{sen. } E \cos. 22^\circ 30' - \text{sen. } E \text{ sen. } 22^\circ 30' \text{ (§. 158.)}$$

Quindi finalmente (§. 156. 158.)

$$(9) \text{ sen. } A = \frac{1}{2} \left\{ \begin{array}{l} + \text{sen. } (E + 22^\circ 30') \\ + \cos. (E + 22^\circ 30') \\ + \text{sen. } (E - 22^\circ 30') \\ - \cos. (E - 22^\circ 30') \end{array} \right\}$$

212. Quest'equazione non si può anche preparare in altro modo, perchè il calcolo riesca più facile per mezzo de' seni, e coseni artificiali, i quali si sogliono trovare nelle tavole più facilmente di dieci in dieci secondi. Perchè essendo (§. 211.)

$$\begin{aligned} \text{sen. } A &= \frac{1}{2} + 2 \text{ sen. } E \frac{V(2 - V^2)}{2}, V^{\frac{1}{2}} = \\ &\left(\frac{1}{V(4 - 2V^2)} + \text{sen. } E \right) \frac{V(4 - 2V^2)}{2} = \\ &\left(\frac{V(2 + V^2)}{2} + \text{sen. } E \right) \frac{V(2 - V^2)}{2}; V^{\frac{1}{2}} = \\ &(\text{sen. } 67^\circ 30' + \text{sen. } E) \frac{\text{sen. } 22^\circ 30'}{\text{sen. } 45^\circ} \text{ (}\S. 37.\text{)}. \\ &\text{E facendo } 67^\circ 30' = p; E = q; \text{ si avrà} \\ &(\S. 156.) \end{aligned}$$

$$[9] \text{ sen. } A = \frac{\text{sen. } \frac{67^\circ 30' + E}{2} \cos. \frac{67^\circ 30' - E}{2}}{\cos. 22^\circ 30'}$$

La quale equazione sarà facile da calcolare per via de'logaritmi de'seni, e de'coseni.

223. Se dunque prenderemo sul compasso una distanza del punto e da qualche punto Z estremo di un arco conosciuto $BZ = E$, e la porteremo da a a qualche altro punto Z' della circonferenza; conosceremo il nuovo arco $BZ' = A$ per via dell'equazione (9), ovvero della [9]. Queste avranno i loro limiti, poichè l'arco BZ dovrà essere tale, che non si abbia eZ minore di aF .

224. Avendosi dal §. 221. $2 \text{ sen. } A \sqrt{2} = \sqrt{2} + 2 \text{ sen. } E \cdot V(2 - V^2)$; e si moltiplichì questa equazione per $\frac{V(2 + V^2)}{V^2}$, avremo

$$2 \operatorname{sen.} A \sqrt{(2 + \sqrt{2})} = \sqrt{(2 + \sqrt{2})} + 2 \operatorname{sen.} E,$$

$$\text{e quindi } \operatorname{sen.} E = 2 \operatorname{sen.} A \frac{\sqrt{(2 + \sqrt{2})}}{2} -$$

$$\frac{\sqrt{(2 + \sqrt{2})}}{2} = 2 \operatorname{sen.} A - \operatorname{sen.} 67^{\circ} 30' -$$

$$\operatorname{sen.} 67^{\circ} 30' \text{ (p. 37.)}; \text{ quindi (p. 158)} \\ (10) \operatorname{sen.} E = \cos.(A - 67^{\circ} 30') - \cos.(A + 67^{\circ} 30') \\ = \operatorname{sen.} 67^{\circ} 30'.$$

225. Anche quella equazione decima si può preparare diversamente ad uso de' logaritmi. Poichè essendo

$$\operatorname{sen.} E = \left(\operatorname{sen.} A - \frac{1}{2}\right) 2 \frac{\sqrt{(2 + \sqrt{2})}}{2}$$

$$= (\operatorname{sen.} A + \operatorname{sen.} -30^{\circ}) 2 \operatorname{sen.} 67^{\circ} 30', \text{ facendo } A = p; -30^{\circ} = q \text{ si avrà (p. 256.)}$$

$$[10] \operatorname{sen.} E =$$

$$4 \operatorname{sen.} \frac{A - 30^{\circ}}{2} \cos. \frac{A + 30^{\circ}}{2} \operatorname{sen.} 67^{\circ} 30'.$$

226. E' chiaro, che tutti i valori dell'arco BZ, ovvero $Bz = \pm A$, che daranno aZ maggiore di cf , non si potranno introdurre nell'equazione decima, che quindi riceverà i suoi limiti.

227. Finalmente due altre equazioni ottenere si possono dal confronto dell'equazione (B) colla (E). Poichè se si piglia una distanza da c a qualche punto Z della circonferenza, che sia l'estremo d'uo arco conosciuto $BZ = E$, e con questa distanza cZ presa per raggio, e fatto centro in b si segni un arco, che tagli

la circonferenza in qualche altro punto Z' , che determini l'arco $BZ' = B$; si conoscerà quest'arco per via del suo seno nel modo seguente. Fatto nell'equazione (B) (§. 196.) $Z_1 = 2 \text{ sen. } B$, e nell'equazione (E) $Z_1 = 2 \text{ sen. } E$, e fatto in esse $bZ_1 = cZ_1$, si avrà dopo la sostituzione dei valori (§. 198.)

$$\frac{3 - \sqrt{5}}{2} + \text{sen. } B(\sqrt{5} - 1) = 3 - \sqrt{2} - 2 \text{ sen. } E + \sqrt{(2 - \sqrt{2})}; \text{ donde si ricava } 2 \text{ sen. } B(\sqrt{5} - 1) = \sqrt{5} + 1 - 2\sqrt{2} - 4 \text{ sen. } E + \sqrt{(2 - \sqrt{2})}; \text{ e moltiplicando da}$$

ambe due le parti per $\frac{\sqrt{5} + 1}{8}$, avremo

$$\text{sen. } B = \frac{3 + \sqrt{5}}{4} - \frac{(\sqrt{5} + 1)}{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} - 4 \text{ sen. } E \frac{\sqrt{(2 - \sqrt{2})}}{2} + \frac{(\sqrt{5} + 1)}{4} = 2 \text{ sen. }^{\circ} 54' - 2 \text{ sen. } 54' \text{ sen. } 45' - 4 \text{ sen. } E \cdot \text{sen. } 22^{\circ} 30' \text{ sen. } 54'.$$

(§. 209.); e quindi (§. 158.) $\text{sen. } B = 1 - \cos. 108^{\circ} - \cos. 9^{\circ} - \text{sen. } 9^{\circ} - 2 \text{ sen. } E(\cos. 31^{\circ} 30' - \cos. 76^{\circ} 30')$, e quindi (§. 156.)

$$(11) \text{ sen. } B = 1 + \text{sen. } 18^{\circ} - \cos. 9^{\circ} - \text{sen. } 9^{\circ} - \text{sen. } (E + 31^{\circ} 30') - \text{sen. } (E - 31^{\circ} 30') + \text{sen. } (E + 76^{\circ} 30') + \text{sen. } (E - 76^{\circ} 30')$$

228. Anche quest'equazione (11) avrà limiti da due capi. Poichè la distanza minima $cF = 1 - \sqrt{(2 - \sqrt{2})}$ è minore della di-

Alanza $bf = 1 - \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$, e la massima cf è maggiore della bf .

229. Se l'equazione $2\text{sen. } B(\sqrt{5} - 1) = \sqrt{5} + 1 - 2\sqrt{2} \rightarrow 4\text{sen. } E \cdot \sqrt{(2 - \sqrt{2})}$ trovata qui sopra §. 227. si moltiplichi per $\frac{\sqrt{(2 + \sqrt{2})}}{4\sqrt{2}}$,

$$\text{si avrà } \text{sen. } E = 2 \frac{(\sqrt{5} + 1)}{4} \cdot \frac{\sqrt{(2 + \sqrt{2})}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \\ = \frac{\sqrt{(2 + \sqrt{2})}}{2} = 4\text{sen. } B \cdot \frac{(\sqrt{5} - 1)}{4} \times \\ \frac{\sqrt{(2 + \sqrt{2})}}{2} \cdot \sqrt{2} = 2\text{sen. } 34^\circ \cdot \text{sen. } 67^\circ 30' \times$$

$\text{sen. } 45^\circ - \text{sen. } 67^\circ 30' = 4\text{sen. } B \cdot \text{sen. } 18^\circ \times$
 $\text{sen. } 67^\circ 30' \cdot \text{sen. } 45^\circ = \text{sen. } 67^\circ 30' (\cos. 9^\circ$
 $+ \text{sen. } 9^\circ) - \text{sen. } 67^\circ 30' = 2\text{sen. } B \times$
 $\text{sen. } 67^\circ 30' (\cos. 27^\circ - \text{sen. } 27^\circ) =$
 $\frac{1}{2}(\text{sen. } 76^\circ 30' - \cos. 76^\circ 30' + \text{sen. } 58^\circ 30'$
 $+ \cos. 58^\circ 30') - \text{sen. } 67^\circ 30' - \text{sen. } B(\text{sen. } 85^\circ 30'$
 $+ \text{sen. } 40^\circ 30' - \cos. 40^\circ 30' - \cos. 85^\circ 30')$
 donde si ha finalmente

$$(12) \text{sen. } E =$$

$$\frac{1}{2} \left(\text{sen. } 76^\circ 30' - \cos. 76^\circ 30' \right) - \text{sen. } 67^\circ 30' \\ + \text{sen. } 58^\circ 30' + \cos. 58^\circ 30' \\ - \frac{1}{2} \left\{ \begin{array}{l} \cos. (85^\circ 30' - B) + \text{sen. } (85^\circ 30' - B) \\ - \cos. (85^\circ 30' + B) - \text{sen. } (85^\circ 30' + B) \\ + \cos. (40^\circ 30' - B) + \text{sen. } (40^\circ 30' - B) \\ - \cos. (40^\circ 30' + B) - \text{sen. } (40^\circ 30' + B) \end{array} \right\}$$

La quale equazione non ha limiti.

230. Se per accidente qualcuno dei valori, che si

trovano con queste dodici equazioni, si trovi a prima giunta prossimo a qualche valore utile, e cercato nella Soluzione de' Problemi; avremo il vantaggio di arrivare all'intento per una via semplicissima. Poichè non si avranno ad impiegare altri punti presi fuori della circonferenza, che i soli tre già rimarcati tante volte a , b , ed c , e nella circonferenza qualcuno di quelli, che servono alla divisione esatta della circonferenza per via delle Soluzioni dei Problemi del Libro Secondo. Passiamo dunque oramai a darne varj esempj.

231. E prima vedremo come si possa dividere il cerchio alla maniera antica in gradi e minuti, senza l'errore di secondi. Per far quello supporremo, che la circonferenza del cerchio BDd sia divisa in dugento quaranta parti (§. 57-58.), ciascuna delle quali come la Pd contiene $1^{\circ} 30'$, e che la numerazione positiva cominci da B verso F , e una simile numerazione negativa vada da B verso f , e sieno i punti Z , e Z' punti vaghi, che non hanno per ora altra condizione, se non che li trovano tra B , ed F sulla circonferenza; e illesamente i punti z , e z' tra B , ed f . Questo lo facciamo a scanso delle troppe

Fig.
12.

Figure

Figure, che bisognerebbero se se ne replicasse una ad ogni Problema. Inoltre la minutezza delle divisioni appena le lascerebbe scorgere anche in Figure molto maggiori della Fig. 12.

PROBLEMA.

232. **T**rovare l'arco d'un grado antico, Fig. ossia di 1° senza l'errore di mezzo secondo.

Soluzione I. Sia l'arco $Bz = -55^\circ 30'$ (§. 231.). Si prenda sul compasso la distanza bz , e fatto centro in e si segni un arco, che tagli la circonferenza in un punto Z . Sarà l'arco $BZ = 52^\circ 59' \frac{1739}{1751}$, cioè di 53° , senza che vi manchino venticinque minuti terzi. Si ha poi nelle divisioni da B verso F eseguite col Problema §. 42. l'arco di $54^\circ = \frac{18}{120}$. Si avrà dunque anche l'arco $54^\circ - 53^\circ = 1^\circ$ colla approssimazione, che si voleva.

Dimostrazione. Se nell'equazione (12) si faccia $B = -55^{\circ} 30'$, risulta in fine del calcolo

$$\text{sen. } E = 0,7986343 = \text{sen. } 52^{\circ} 59' \frac{1739}{1751}.$$

Soluzione II. Sia l'arco $BZ = 10^{\circ} 30'$. Colla distanza bZ presa per raggio, e col centro a si descriva un arco, che tagli la circonferenza in un altro punto Z' . Sarà l'arco $BZ' = 29^{\circ} 29' \frac{2511}{2532}$, cioè $= 29^{\circ} 30'$ senza l'errore di mezzo secondo. Si trova poi nella divisioni del §. 58. l'arco di $28^{\circ} 30' = \frac{29}{240}$ della circonferenza. Dunque si avrà la differenza de' due archi eguale a $1''$ coll'approssimazione voluta.

Dimostrazione. Se nell'equazione (7) si ponga $B = 10^{\circ} 30'$, risulterà in fine del calcolo

$$\text{sen. } A = 0,4924215 = \text{sen. } 29^{\circ} 29' \frac{2511}{2532}.$$

Mancherà dunque la differenza degli archi dal valore di un grado di $29'''$.

233. Questa seconda Soluzione è meno prossima della prima di 5 minuti terzi, ma le sezioni degli archi si fanno in questa ad un angolo più vicino al retto.

234. Avendosi l'arco di $1^{\circ} 30'$ (§. 225.), ed essendosi trovato l'arco di 1° (§. 226.), si avrà per sottrazione anche l'arco di $30'$, ossia il mezzo grado, e quindi si avrà modo di dividere tutta la circonferenza in mezzi gradi senza accumulare errori, e senza che alcun punto sia lontano dal suo vero sito di mezzo secondo.

PROBLEMA.

235. **T**rovare l'arco di un quarto di grado, ossia di $15'$, senza l'errore di un minuto terzo.

Soluzione. Sia l'arco $Bz = -12^{\circ}$, la distanza ez sarà eguale alla corda di $87^{\circ} 15'$. Se dunque si piglierà sul compasso, e fatto centro in B si taglierà l'arco BF in un punto Z', sarà l'arco $BZ' = 87^{\circ} 15'$. Si ha poi dalle divisioni del §. 42. l'arco di $87^{\circ} = \frac{29}{120}$ della circonferenza. Si avrà dunque la differenza de' due archi $= 15'$.

Dimostrazione. Se nell'equazione (3) (§. 206.)
 $\cos. E' = \sin. 45^{\circ} - \sin. 30^{\circ} + \cos. (E - 22^{\circ} 30')$
 $\quad \quad \quad - \cos. (E + 22^{\circ} 30')$

Si ponga $E = 11''$, si avrà

$$\text{sen. } 45^\circ - \text{sen. } 30' = 0, 2071068$$

$$\cos. \rightarrow 34^\circ 30' = 0, 8241161$$

$$- \cos. 10^\circ 30' = -1, 0167451$$

$$\cos. E' = 0, 0479781$$

Ora nelle tavole, che danno i seni naturali con sette cifre, si trova $0, 0479781 = \cos. 87^\circ 15'$ senza alcuna varietà nemmeno nell'ultima cifra. Impiegando poi più decimali si trova

$$\cos. E' = 0, 0479780622$$

$$\cos. 87^\circ 15' = 0, 047978128520$$

Impiegando sole otto cifre decimali si ha

$$\cos. 87^\circ 15' 1'' = 0, 04797229$$

Si ha dunque per $1''$ la differenza 584. Se

584 dà di differenza $60'''$, 7 darà $\frac{105}{146}$ di

minuto terzo. Sarà dunque l'arco E' , del quale è corda la eZ' , di $87^\circ 15'$ con una mancanza minore di un minuto terzo.

236. Si potrà per mezzo di questo Problema dividere la circonferenza in 1440 parti, cioè in tanti quarti di grado, senza che vi sia in alcun punto di divisione l'errore di tre minuti terzi. Poichè fatte sopra ogni arco PA di $1^\circ 30'$ tre divisioni di $15'$ in $15'$ da P verso A , e due da A verso P , resterà l'arco

PA diviso in sei parti, ciascuna delle quali sarà di un quarto di grado senza l'errore indicato nella posizione di alcun punto di divisione. Così nel resto della circonferenza. Quindi innanzi supporremo la circonferenza divisa in gradi, e quarti, che per semplicità del calcolo supporremo esatti. Si potrà tener conto dei loro errori, qualor si voglia.

PROBLEMA.

237. **T**rovare un arco di $10'$, ossia la sesta parte d'un grado senza l'errore di $10''$, ossia della sesta parte d'un secondo.
Soluzione. Sia l'arco $Bz = 49^\circ 30'$; sarà la distanza bz eguale alla corda dell'arco $38^\circ 50'$, senza l'errore indicato. Sottraendo poi l'arco $38^\circ 50'$ dall'arco $39^\circ = \frac{13}{120}$ della circonferenza, che si ha col §. 42., rimarrà l'arco di $10'$.

Dimostrazione. Se nell'equazione (1) si porrà $B = 49^\circ 30'$, ne verrà $\cos. B' = 0,7789738 = \cos. 38^\circ 49' \frac{1819}{1824}$. Si ha dunque $B' = 38^\circ 50'$ col difetto di $9''$.

238. Sottraendo da un arco di $50'$ mancante di $9''$ un arco di $45'$ (§. 236.) mancante di qualche minuto terzo, si avrà l'arco di $5'$, ossia la dodicesima parte del grado senza l'errore di $9''$.

P R O B L E M A.

239. **T**rovare l'arco di $6'$, ossia un decimo di grado senza l'errore di $13''$.

Soluzione. Sia l'arco $BZ = 45^\circ$; cioè sia l'arco BG . Si prenda sul compasso la distanza BG , e fatto centro in b si tagli la circonferenza in z . Sarà l'arco $Bz = -40^\circ 6'$, senza l'errore indicato. Sottraendo l'arco di -40° (§. 236.), resterà l'arco di $6'$.

Dimostrazione. Se nell'equazione (5) si ponga $B' = 45^\circ$; ne verrà $\text{sen. } B = \sim 0,6441228 = \text{sen. } -40^\circ 5' \frac{2217}{2225}$. Sarà dunque l'arco $B = Bz = -40^\circ 6'$ col difetto di $12''$.

240. Sottraendo dall'arco di $6'$ (§. 239.) l'arco di $5'$ (§. 238.), rimarrà l'arco di $1'$ coll'errore di pochi minuti terzi. Ma si può trovare quest'arco immediatamente col seguente

PROBLEMA.

241. **T**rovare immediatamente l'arco di 1' senza l'errore di 22 minuti terzi.

Soluzione. Sia l'arco $Bz = -27^\circ$. Si prenda sul compasso la distanza bz come raggio, e fatto centro in e si tagli la circonferenza in Z . Sarà l'arco $BZ = 29^\circ 59'$ coll' eccello di 10 minuti terzi. Essendo dunque l'arco $BN = 30^\circ$ (§. 31.), sarà l'arco $ZN = 1'$ mancante di $10'''$.

Dimostrazione. Se nell'equazione (12) si ponga $B = -27^\circ$, si avrà $\text{sen. } E = 0,4997426 = \text{sen. } 29^\circ 59' \frac{10}{1000}$. Dunque ec.

PROBLEMA.

242. **T**rovare l'arco di 9' senza l'errore di 7 minuti terzi.

Soluzione. Colla distanza bK presa per raggio, e col centro e si segni un arco, che tagli la circonferenza in z . Sarà l'arco $Bz = -4^\circ 21'$ coll' eccello di 6

minuti terzi, che sottratto da $-4^{\circ}30'$ lascia $9'$ senza l'errore indicato.

Dimostrazione. Se nell'equazione (12) si faccia $B = 15^{\circ} = BK$ (§. 32.), si avrà sen. $E =$

$$-0,0758494 = \text{sen. } -4^{\circ}21' \frac{5}{3901}.$$

dunque l'arco $B\gamma = -4^{\circ}21'0''6'''$.

Questo Problema servirà ancora alla nuova divisione del cerchio, come vedremo (§. 256.).

243. L'arco di $15'$ mancante meno di un minuto terzo (§. 235.), quello di $10'$ crescente meno di $10'''$ (§. 237.), quello di $6'$ mancante meno di $13'''$ (§. 239.), quello di $1'$ mancante meno di $22'''$ (§. 241.), quello di $9'$ mancante meno di $7'''$ (§. 242.) si potranno combinare in modo per addizione, o sottrazione senza accumulare molto gli errori, che in fine risulti tutta la circonferenza divisa in gradi, e minuti primi senza l'errore che di pochissimi minuti terzi. Poichè raddoppiando per esempio l'arco di $9'$, avremo un arco di $18'$ mancante meno di $14'''$, dal quale sottraendo l'arco di $6'$ mancante meno di $13'''$ avremo l'arco di $12'$ mancante di circa un minuto

terzo. Sottraendo ora quest'arco dall'arco di $15'$ mancante meno di $1''$ (§. 235.), avremo l'arco di $3'$ coll'errore di un minuto terzo appena. Con questo si potrà dividere in cinque parti ogni arco di $15'$, e resterà divisa tutta la circonferenza di tre in tre minuti primi coll'errore minore di sei minuti terzi per conto di quest'ultima divisione, il quale errore, se si porrà sul verso contrario all'errore di tre minuti terzi al più, che si commette nella divisione di $15'$ in $15'$ (§. 235.), diverrà anche minore. Quindi impiegando l'arco di $1'$ mancante meno di $4'''$ (§. 240.) a dividere ogni arco di $3'$, non si ver-
rà mai a commettere un errore di $10'''$, e si avrà divisa tutta la circonferenza in gradi, e minuti primi.

Si potrebbero anche combinare questi, o altri archi cavati dalle dodici equazioni superiori, in guisa che si venisse a commettere minore errore, e noi impiegheremmo in questo alquanti Problemi, se per una parte questa divisione del cerchio in 360° non dovesse antiquarsi, e se per l'altra credessimo, che gli ar-

telici, che ancora la volessero usare, trovassero opportune per la pratica tali ricerche. Non vogliamo però omettere i seguenti Problemi, supponendo adesso, che si sia diviso il cerchio intero in gradi antichi, e minuti, che per semplicità supporremo esatti.

PROBLEMA.

244. **T**rovare l'arco di $20''$, ossia un terzo di minuto crescente di $1'''$ appena.

Soluzione I. Pel §. 201. si trova l'arco di $40''$ crescente meno di un minuto terzo. Quindi anche l'arco di $20''$ complemento al $1'$ mancante meno di un minuto terzo.

Soluzione II. Presa sul compasso la corda dell'arco $61^{\circ} 30'$ come raggio, e fatto centro in c si descrive un arco, che tagli la circonferenza in Z . Sarà l'arco $BZ = 20^{\circ} 39' 40''$ crescente di un minuto terzo appena. Quindi sottraendo quest' arco dall'arco $20^{\circ} 40'$, si avrà l'arco di $20'$ mancante appena di $1'''$.

Dimostrazione. Se nell'equazione (6) si ponga $E' = 61^{\circ} 30'$, adoperando tavole più copiose di seni, si avrà $\text{sen. } BZ =$

$$\text{sen. } E = 0,35283991; \text{ si ha poi}$$

$$\text{sen. } 20^{\circ} 39' 40'' = 0,35283984$$

$$\text{Ora } \log. 0,3528399 = 9,5475777$$

$$\log. \text{sen. } 20^{\circ} 39' 40'' = 9,5475776$$

$$\log. \text{sen. } 20^{\circ} 39' 50'' = 9,5476334$$

$$\text{differenza} = 558$$

Dunque E crescerà sopra l'arco $20^{\circ} 39' 40''$ di $\frac{10''}{558}$ circa, cioè di $1''$ e poco più.

PROBLEMA.

245. **T**rovare l'arco di $15''$, ossia un quarto di minuto mancante di $10''$ circa.

Soluzione. Si prenda per raggio sul compasso la corda di $31^{\circ} 30'$, e fatto centro in e si tagli la circonferenza in un punto Z . Sarà l'arco $BZ = 57^{\circ} 30' 15''$ mancante di $9''$.

Dimostrazione. Se nell'equazione (6) s'introduca

$$E' = 31^{\circ} 30', \text{ si troverà } E = 57^{\circ} 30' \frac{386}{1563}$$

$$\text{Ma si ha } \frac{390}{1563} = \frac{1}{4}. \text{ Dunque la mancanza è}$$

$$\text{di } \frac{4}{1563} \text{ circa, cioè di } 10'' \text{ circa.}$$

PROBLEMA.

246. **T**rovare l'arco di $12''$, ossia un quinto di minuto mancante di $1'''$ circa.

Soluzione. Sia l'arco $Bz = -10^{\circ} 30'$. Presa sul compasso per raggio la distanza bz , e fatto centro in a si tagli la circonferenza in Z . Sarà l'arco $BZ = 40^{\circ} 40' 12''$ colla mancanza di $1'''$ circa.

Dimostrazione. Se nell'equazione (7) si ponga $B = -10^{\circ} 30'$, risulterà dal calcolo $A = 40^{\circ} 40' \frac{440}{2206}$. Ora si ha $\frac{441}{2206} = \frac{1}{5}$. Si ha dunque la mancanza di $\frac{1}{2206}$ cioè di $1'''$ circa.

Se si calcolasse con tavole più copiose, si rileverebbe più precisamente l'errore.

PROBLEMA.

247. **T**rovare l'arco di $10''$, ossia di un sesto di minuto primo crescente di $1'''$ circa.

Soluzione. Sia l'arco $Bz = -24^{\circ}$. Presa sul compasso per raggio la distanza az ,

e fatto centro in a si segni un arco, che tagli la circonferenza in Z . Sarà l'arco $BZ = 16^{\circ} 15' 10''$ coll' errore indicato.

Dimostrazione. Se nell'equazione [9] si ponga $E = -24''$, ne verrà per risultato $\log. \text{sen. } A = 9.4469652$. Questo si trova essere logaritmo del seno di $16^{\circ} 15' 10'' \frac{10}{722}$. L'eccesso dunque non arriva a due minuti terzi.

PROBLEMA.

248. **T**rovare l'arco di $5''$, ossia d'una decima di minuto primo senza l'errore sensibile alle tavole comuni, e minore di $2''$.

Soluzione I. Sia l'arco $BZ = 4^{\circ} 30'$. Si prenda sul compasso per raggio la distanza eZ , e fatto centro in a si segui un arco, che tagli la circonferenza in un altro punto Z' . Sarà l'arco $BZ' = 32^{\circ} 51' 5''$ senza l'errore indicato.

Dimostrazione. Se nell'equazione [9] si ponga $E = 4^{\circ} 30'$, risulterà $\log. \text{sen. } A = 9.7343692$

ora $\log. \text{sen. } 32^{\circ} 51' = 9.7343529$; e la differenza è 163; la differenza poi nelle tavole per dieci minuti è 326 doppia in puoto di 163. Duoque ec.

Calcolato l'errore con tavole più copiose risulta minore di $2''$.

Soluzione II. Sia l'arco $BZ = 31^{\circ} 30'$. Si prenda sul compasso per raggio la distanza eZ , e col centro a si tagli la circonferenza in un altro punto Z' . Sarà l'arco $BZ' = 51^{\circ} 30' 55''$ col difetto minore di un minuto terzo.

Dimostrazione. Se nell'equazione [9] si ponga $E = 31^{\circ} 30'$, risulterà per via delle tavole comuni $\log. \text{sen. } A = 9.8936365 = \log. \text{sen. } 51^{\circ} 30' 50'' \frac{2}{3}$. Il qual resto $\frac{2}{3}$ riferendosi a $10''$ darà $5''$ coll'eccesso minore di $1''$. Sarà dunque $A = 51^{\circ} 30' 55''$, il qual arco sottratto da $51^{\circ} 31'$ lascerà $5''$ col difetto indicato.

Ma è tempo di passare a dimostrare qual uso si possa fare delle dodici equazioni poste sopra volendo dividere la circonferenza del cerchio alla nuova maniera de' Francesi.

249. Secondo questa maniera la circonferenza vien divisa in 400 gradi, acciocchè il quadrante, che è fondamento di tutta

la trigonometria resti diviso in 100 gradi. Ogni grado vien diviso in 100 minuti primi, ogni minuto primo in 100 secondi, e così via via. La natura delle decimali dispensa, se un vuole, dal nominar gradi, minuti, o secondi, intendendosi abbastanza la natura del rotto dal posto delle decimali.

250. Quindi ne viene, che nove gradi antichi vagliono 10 gradi moderni, ossia $9^{\circ} = 0,10$, che $54' = 0,01$; che $27' = 0,005$; che $5' 24'' = 0,001$; che $32'' 24''' = 0,0001$; cioè che un grado moderno vale 54 minuti primi antichi, che un minuto moderno vale $32'' 24'''$ dell'antica divisione, &c.

251. Le divisioni accurate ottenute per via dei tre punti *a*, *b*, ed *c* nel Secondo Libro danno sino ad una 240^{esima} della circonferenza (§. 59.). L'arco, che la forma, è nella divisione antica di $1^{\circ} 30'$ in punto. Esso non si esprime egualmente con un numero finito di cifre decimali nella divisione moderna. Il primo arco, che si formi coll'aggregare delle 240^{esime} , e che si esprima con un numero finito di decimali del quadrante, è

l'arco di $\frac{3}{240}$, ossia di $\frac{1}{80}$ della circonferenza, il quale è di $4^{\circ} 30' = 0,05$ del quadrante, cioè di 5 gradi della nuova divisione. Si può dunque coi metodi del Secondo Libro, e per via dei soli tre punti a, b , ed e presi fuori della circonferenza dividerla in parti eguali di cinque gradi moderni ciascuna, e ciò con precisione geometrica, il che è già molto vantaggio di questa Geometria.

252. Si potrebbe, se si volesse, colla bisezione degli archi (§. 60.) dividere in seguito la circonferenza in archi di due gradi, e mezzo ciascuno, ossia di 0,025, quindi proseguire la bisezione, ma con essa non si potrà avere, come è chiaro, un grado precisamente. Non resta dunque mezzo alla Geometria per ottenere l'arco d'un grado (§. 63.), e solo è da cercarsi qualche costruzione, che lo dia almeno prossimamente.

PROBLEMA.

253. **T**rovare l'arco d'un nuovo grado, ossia di 0,01 senza l'eccesso d'un setto di minuto secondo della nuova divisione, ossia di tre minuti terzi della vecchia.

Solu-

Soluzione. Si pigli sul compasso la corda di 138° gradi della divisione vecchia, ossia di quarantasei centovesime parti della circonferenza (§. 42.), e fatto centro in a si segni un arco, che tagli il quadrante Bf in un punto z . Sarà l'arco Bz undici gradi della nuova divisione, dal quale sottraendo l'arco di $9^\circ = 0,10$ (§. 252.), resterà un arco $= 0,01$ col' eccesso piccolissimo indicato.

Dimostrazione. Se nell'equazione (4) si ponga $A' = 138^\circ$, avremo $\text{sen. } A =$
 $\frac{1}{2}(\text{sen. } 45^\circ + \text{sen. } 183^\circ + \text{sen. } -93^\circ) =$
 $\frac{1}{2}(\text{sen. } 45^\circ - \text{sen. } 3^\circ - \text{sen. } 87^\circ)$. Si ha poi

$$\begin{array}{r} - \text{sen. } 3^\circ = -0,0523360 \\ - \text{sen. } 87^\circ = -0,9986195 \\ \text{sen. } 45^\circ = \underline{1,2928912} \\ -0,3438587 \\ -0,1719193 \end{array}$$

Si ha poi $\text{sen. } 9^\circ 54' = 0,1719191$

$$\text{sen. } 9^\circ 55' = 0,1722156$$

Abbiamo dunque l'arco $Bz = A = 9^\circ 54'$ col solo eccesso di $\frac{1}{100}$ di un minuto primo della vecchia divisione, cioè senza l'eccesso di $4''$, e quindi senza l'errore di un sesto di minuto secondo della nuova divisione.

254. Si potrebbe con tavole alquanto più ampie

delle comuni indagare più precisamente un tale errore. In qualunque modo egli è così piccolo, che anche accumulandolo due o tre volte non riuscirebbe sensibile nemmeno nei maggiori quadranti. Ora non ci sarà di bisogno d'accumularlo più di due volte nella divisione di essi. Poichè si ha già con precisione geometrica l'arco di $0,05$ (§. 251.). Se in questo si segnano due divisioni di un grado cominciando dai due estremi, e venendo sul verso contrario, si avranno segnati su quell'arco quattro punti, che ne daranno la divisione in cinque gradi, e ciascuno di questi punti non sarà lontano dalla sua vera posizione di sei interi minuti terzi della divisione vecchia, ossia di un terzo di minuto secondo della nuova.

255. In vigore di questo Problema si supporrà ora divisa la circonferenza nei 400 gradi della nuova divisione.

PROBLEMA.

256. **T**rovare, l'arco di un nuovo mezzo grado senza l'eccesso di sette minuti terzi della division vecchia, ossia di un terzo di minuto secondo della nuova.

Soluzione. Si prenda sul compasso la distanza del punto b dal punto K , e con

questo raggio bK fatto centro in c si segni un arco, che tagli la circonferenza in un punto γ . Sarà l'arco $B\gamma = -4^{\circ} 21'$ coll'eccesso minore di $7''$. Si sottragga da esso un arco di $3^{\circ} = Np$ (§. 43.). Si avrà di residuo $1^{\circ} 21'$, cioè un grado e mezzo della nuova divisione, colla corda del quale presa per raggio, e facendo centro in tutti i punti dei gradi (§. 255.) si potranno dividere per metà tutti gli stessi gradi.

Dimostrazione. Se nell'equazione (12) s'introduca $B = BK = 15^{\circ}$ (§. 32.); risulterà $E = -4^{\circ} 21' \frac{1}{180}$. Dunque ec. (§. 341.).

PROBLEMA.

257. **T**rovare l'arco di un quinto di grado nuovo senza l'eccesso di un minuto secondo vecchio.

Soluzione. Presa sul compasso la corda di 51° , e fatto centro in c si segni un arco, che tagli il quadrante in Z ; sarà l'arco BZ di trentasette gradi nuovi coll'aggiunta di un quinto di grado col piccolo errore indicato.

Dimostrazione. Se nell'equazione (6) si faccia $E' = 51^\circ$, si avrà $E = 33^\circ 28' \frac{100}{1000} = 33^\circ 28' 48'' \frac{100}{1000}$. Ma $33^\circ 28' 43'' = 0,372$. Dunque cc.

PROBLEMA.

258. **T**rovare l'arco di quattro decime di un nuovo grado senza l'eccesso di $16'''$ antichi.

Soluzione. Sia l'arco $BZ = 76^\circ 30'$, e si prenda un'apertura di compasso $= BZ$, colla quale fatto centro in a si segui un arco, che tagli il quadrante in un punto Z' . Sarà l'arco $BZ' = 0,094$, cioè a nove gradi nuovi, e quattro decime coll'eccesso indicato.

Dimostrazione. Se nell'equazione (7) s'introduca $B = 76^\circ 30'$; ne verrà $A = 8^\circ 27' \frac{100}{1000}$. Ma $8^\circ 27' \frac{100}{1000} = 0,094$. Dunque cc.

PROBLEMA.

259. **D**ividere un grado della nuova divisione in dieci parti eguali.

Soluzione. Avendolo diviso per metà per via del §. 256., si sottraggano dall'arco di 0,005 gli archi di 0,004 (§. 258.), e di 0,002 (§. 257.), e si avranno gli archi di 0,001, e di 0,003 con l'errore di soli minuti terzi della vecchia divisione. Si avranno dunque tutti gli archi per la divisione dell'arco di 0,005 in cinque parti, e quindi dividendo similmente l'altra metà del grado, resterà diviso tutto in dieci parti eguali.

260. Si potranno fare sottrazioni, e somme de' suddetti archi in modo, che contrapponendo gli eccessi ai difetti ne risulti una millesima quasi esatta. Si potrà quindi innanzi supporre diviso il quadrante in millesime, ossia di dieci in dieci nuovi minuti. Questi si supporranno esatti per semplicità del calcolo.

PROBLEMA.

261. **T**rovare l'arco d'un nuovo minuto senza l'errore di un vecchio minuto terzo.

Soluzione. Sia un arco $Bz = 1^{\circ} 30'$.
La distanza az sarà corda di un arco di
Q 3

1,3609 senza l'errore indicato. Sottraendo quell'arco dall'arco di 1,361 (§. 260.), si avrà l'arco di 0.0001.

Dimostrazione. Se nell'equazione (1) si ponga $A = -1^{\circ} 30'$, risulta $A' = 122^{\circ} 28' \frac{1000}{1000} = 122^{\circ} 28' 51'' 36''' = 1,3609$ (§. 250.). Dunque cc.

PROBLEMA.

262. **T**rovare l'arco di due nuovi minuti senza l'errore di un vecchio minuto terzo.

Soluzione. Sia l'arco $Bz = -48^{\circ}$. La distanza bz sarà corda di un arco di 0,4422 colla precisione indicata. Da quell'arco sottraendo l'arco di 0,442 (§. 260.), resterà l'arco di 0,0002.

Dimostrazione. Se nell'equazione (1) si ponga $B = -48^{\circ}$, risulta $B' = 39^{\circ} 47' \frac{1000}{1000} = 39^{\circ} 47' 52'' 48''' = 0,4422$ (§. 250.). Dunque cc.

PROBLEMA.

263. **T**rovare l'arco di tre nuovi minuti senza l'errore di un nuovo minuto terzo.

Soluzione. Sia un arco $Bz = -78^\circ$.
 Colla distanza ez presa per raggio, e fatto centro in a si segni un arco, che tagli il quadrante Bf in un punto z' .
 Sarà l'arco $Bz' = -0,0187$ senza l'errore indicato. Se si sottrae quell'arco dall'arco $= -0,019$ (§. 260.), resterà l'arco $= -0,0003$.

Dimostrazione. Se nell'equazione [9] si ponga $E = -78^\circ$, risulta negativo il seno di A .
 Se si cambiano i segni ai due membri dell'equazione, risulta $\log. \text{sen. } A = 8.4678991$.
 Ora nelle nuove Tavole del Callet per la nuova divisione del cerchio si trova
 $8.467 : 8990 = \log. \text{sen. } 0,0187$.
 Da l. sen. $A = 8.4678991$
 si sottr. $DS = 6.1960374$ (Vedi Callet)
 si avrà $2.1718417 = \log 187,00004$
 Si ha dunque $A = -0,018700004$. L'errore si trova anche minore, se s'impiegano più cifre nei logaritmi.

264. La somma approssimazione nella posizione del punto in questi tre Problemi antecedenti, e specialmente nell'ultimo è tale, che non si può desiderare di più. Per via degli archi trovati con essi

Problemi si può in più maniere dividere una millesima di quadrante (§. 260.) in dieci parti eguali, cioè in minuti primi della nuova divisione del cerchio.

265. Nella stessa guisa si potrebbe passare a divisioni più minute. Ma bisognerebbe impiegare tavole più copiose di cifre di quelle, che io ho generalmente impiegate nel calcolare le dodici equazioni soprammentovate. Ciò si potrebbe fare, qualora l'uso richiedesse, che si spinga la divisione d'una circonferenza oltre i minuti primi del nuovo sistema Francese.

PROBLEMA.

266. **I**n un cerchio di dato raggio AB Fig. trovare una corda Bb eguale pressis-
sime ad un quarto della circonferenza.

Soluzione. Si faccia nella circonferenza ad $AB = BC = CD = DE$. Quindi a $BD = Ba = Ea$. Col centro C , e col raggio Ca si segni un arco, che tagli la circonferenza in b . Sarà la Bb la corda cercata.

Dimostrazione. Supposto $AB = 1$, si ponga $BC = A = 60^\circ$ nell'equazione (1); risulterà $A' = 43^\circ 33' \frac{124}{1000} = Cb$. Sarà dunque l'arco $BCb = 103^\circ 33' \frac{124}{1000}$. La sua metà $51^\circ 46' \frac{124}{1000}$ ha per seno 0,7855998. Sarà dunque la corda $Bb = 1,5711996$. Il quarto della circonferenza è poi $= 1,5707963$. L'errore dunque è di 0,0004 circa.

267. Secondo la proporzione di Archimede posto il raggio $= 1$; si trova il quarto della circonferenza $= \frac{7}{4} = 1,5714$. Dunque la costruzione di questo Problema (§. 266.) dà un'approssimazione maggiore. Essendo questa costruzione semplicissima, sarà da usarsi in pratica a preferenza di altre, che potremmo aggiungere, che darebbero bensì una maggiore approssimazione teorica, ma sarebbero più complicate, e però più soggette ad errore.

PROBLEMA.

268. In un cerchio di dato raggio AB Fig. trovare l'arco eguale prossimamente allo stesso raggio.

Soluzione. Si faccia nella circonferenza $BICMFDOEd$ ad $AB = BC = CD = DE = Ed$. Quindi a $BD = Ba =$

Ea. Quindi ad $Aa = BF = Dt = db = aL$. Quindi ad $AB = FO$. Quindi finalmente a $bF = OM$. Sarà l'arco LM eguale prossimamente al raggio.

Dimostrazione. Se nell'equazione (4) s'introduce $A' = 90^\circ$, del quale arco è corda la aL ; risulterà $BL = A = 20^\circ 42' \frac{11}{100}$. Essendo poi $OM = bF$ corda della quinta parte della circonferenza (p. 43.), cioè di 72° , ed essendo l'arco $FO = 60^\circ$; sarà l'arco $FM = 12^\circ$. Quindi l'arco $LM = BF - BL - FM = 57^\circ 17' \frac{11}{100} = 57^\circ 17' 43'' +$. Si ha poi l'arco eguale al raggio, come è noto $= 57^\circ 17' 44''$. Dunque ec.

PROBLEMA.

269. **T**rovare il lato di un quadrato, che Fig. prossimamente sia eguale in area ad un ^{103.} cerchio di raggio dato AB .

Soluzione. Si faccia nella circonferenza $BPCQDRE$ ad $AB = BC = CD = DE$, e collo stesso raggio BA , e coi centri B , ed E si descrivano i due archi ALc , AMd . Coi centri C , e D , e col raggio DB si descrivano gli archi

cNM, dNL. Si faccia ad $AN = BP = PQ$; quindi ad $LM = QR$. Sarà BR il lato cercato.

Dimostrazione. Se nel triangolo isoscele CND si suppone la base $CD = 1$ divisa per metà in μ ; si avrà $(CN)^2 = (C\mu)^2 + (N\mu)^2$, cioè (f. 2.) $3 = \frac{1}{4} + (N\mu)^2$; quindi $N\mu = \frac{1}{2}\sqrt{11}$. Si ha poi $(CA)^2 = (C\mu)^2 + (A\mu)^2$, e quindi $A\mu = \frac{1}{2}\sqrt{3}$. Sarà dunque $AN = \frac{1}{2}(\sqrt{11} - \sqrt{3}) = 0,7912869$, che si trova essere corda di un arco $= 46^\circ 40' \frac{109}{251}$ $= BP = PQ$. Sarà dunque l'arco $BQ = 93^\circ 20' \frac{109}{251}$. Siano condotte le rette BL divisa per metà in n , BD , Dn , BE , e le Da , Li , Mm perpendicolari alla stessa BE in a , i , ed m .

Essendo l'angolo $DBE = 30^\circ$ (20. lib. 3.); sarà sen. $DBE = \frac{1}{2}$; cos. $DBE = \frac{1}{2}\sqrt{3}$. Sarà poi per la Trigonometria cos. $DBn = \frac{Bn}{DB}$;

sen. $DBn = \frac{Dn}{DB}$; cioè cos. $DBn = \frac{1}{2}\sqrt{3}$; e

per essere $Dn = \sqrt{((DB)^2 - (Bn)^2)} = \frac{1}{2}\sqrt{11}$, sen. $DBn = \frac{1}{2}\sqrt{33}$. Si ha poi (f. 154.) cos. $LBi = \cos. (DBn - DBE) = \cos. DBn \cdot \cos. DBE + \text{sen. } DBn \cdot \text{sen. } DBE = \frac{1}{2}\sqrt{3} \times \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}\sqrt{33} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}(3 + \sqrt{33}) = \frac{Bi}{BL} = Bi$ (per essere $BL = BA = 1$).

Dunque $AI = AB - BI = \frac{1}{2}(9 - \sqrt{33})$,
 e quindi $Im = LM = 2AI = \frac{1}{2}(9 - \sqrt{33})$
 $\approx 0,5425729$, che si trova essere corda
 dell'arco $\approx 11^{\circ} 28' \frac{111}{1790} = QR$. Sarà dunque
 l'arco $BQR \approx 124^{\circ} 49' \frac{611}{1790}$. La sua metà
 $62^{\circ} 24' \frac{411}{1790}$ ha per seno $0,8863283$, e però
 la corda di BQR sarà $\approx 1,7726566$. Ora
 posto il raggio $= 1$; si ha l'area del cer-
 chio $\approx 3,1415926$, che ha per logaritmo
 $0,4971499$. La metà di questo logaritmo
 cioè $0,2485749 = \log. \sqrt{3,1415926}$ si trova
 essere $\log. 1,772453$. Si ha dunque l'errore
 di $0,0002$ circa, il che dà un'approssima-
 zione sufficiente.

270. In vece della AN si avrebbe potuto
 adoperare la dL , o la cM , che si de-
 vono trovare eguali alla stessa AN .

Dimostrazione. Se si guidi la dL , e la Dp
 alla sua metà in p ; sarà $\text{sen. } LDp = \frac{Lp}{DL}$.

Ma l'angolo $LDp = \frac{1}{2}LDd = \frac{1}{2}(BDd - BDn) = 30^{\circ} - BDn$. Dunque (§. 154.)
 $\text{sen. } LDp = \frac{1}{2} \cos. BDn = \frac{1}{2} \sqrt{3} \times \text{sen. } BDn$
 $= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{33} = \frac{1}{4} \sqrt{33} \times \frac{1}{2} \sqrt{3}$. Quindi $Lp =$
 $DL \cdot \text{sen. } LDp = \frac{1}{4} \sqrt{11} = \frac{1}{4} \sqrt{3}$, ed $Ld =$
 $\frac{1}{4} \sqrt{11} - \frac{1}{4} \sqrt{3} = AN$.

PROBLEMA.

271. **D**ato il lato AB d'un quadrato;
Fig. trovare il raggio di un cerchio, che
104. gli sia prossimamente eguale in area.

Soluzione. Col raggio AB , centro A si descriva la circonferenza $BCFDLPMEd$. Si faccia ad $AB = BC = CD = DE = Ed$. Col centro B , e col raggio BD si descriva l'arco $d a N D a$. Collo stesso raggio, e col centro E si tagli quell'arco in a . Si faccia ad $Aa = BF = Db = db$. Quindi ad $AB = Da = dN$. Col centro C , e col raggio CN si tagli la circonferenza in P . Si faccia ad $Nn = PM$; quindi ad $Fb = CL$. Sarà LM il lato cercato.

Dimostrazione. Se si supponga $AB = 1$, avendo il triangolo BNd i lati rispettivamente eguali ai lati del triangolo BDL della Fig. 103.; si avrà $\text{sen. } \frac{1}{2}dBN = \frac{1}{2}\sqrt{3}$; $\text{cos. } \frac{1}{2}dBN = \frac{1}{2}\sqrt{33}$ (§. 270.). Quindi $\text{sen. } dBN = 2 \text{sen. } \frac{1}{2}dBN$, $\text{cos. } \frac{1}{2}dBN$ (§. 154.) $= \frac{1}{2}\sqrt{11}$; $\text{cos. } dBN = \sqrt{1 - \text{sen.}^2 dBN} = \frac{1}{2}$. Essendo poi Cb angolo retto (31. lib. 3.), sarà $\text{cos. } CBN = \text{sen. } dBN = \frac{1}{2}\sqrt{11}$. Ma si

ha dalla Trigonometria $(CN)^2 = (BC)^2 + (BN)^2 - 2BC \cdot BN \cdot \cos.CBN$. Dunque $CN = \sqrt{(4 - 2\sqrt{3} \times \frac{1}{2}\sqrt{11})} = \sqrt{(4 - \sqrt{33})} = 1,4410025$, che si trova essere corda di $92^\circ 26' \frac{60}{1011} = CP$. Essendo poi $\text{sen}.NBE = \frac{\frac{1}{2}Nn}{BN} = \text{sen.}(CBE - CBN) = (\S. 154.)$

$\text{sen}.60^\circ \cos.CBN - \cos.60^\circ \cdot \text{sen}.CBN = \frac{1}{2}\sqrt{3} \times \frac{1}{2}\sqrt{11} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$; sarà $Nn = 2BN \times \text{sen}.NBE = \frac{2}{2}(3\sqrt{11} - 5\sqrt{3}) = 0,2149367$, che si trova essere corda di $12^\circ 20' \frac{60}{322} = PM$. Sarà dunque l'arco $CPM = 104^\circ 46' \frac{60}{111}$, dal quale sottratto l'arco CL , che è una quinta parte della circonferenza ($\S. 40.$) $= 72^\circ$, resterà l'arco $LM = 32^\circ 46' \frac{60}{111}$, la corda del quale si trova $= 0,5643274$. Ora posto π il rapporto della circonferenza al diametro, ed R il raggio di un cerchio, si ha la sua area $= \pi R^2$, come è noto. Fatto dunque $\pi R^2 = 1$, che è l'area del quadrato di raggio $AB = 1$, al quale si vuole eguale il cerchio, si avrà $R = \sqrt{\frac{1}{\pi}}$, e $\log. R = -\frac{1}{2}\log. \pi = -0,2485749 = -1 + 1,7514251 = \log. 0,5641896$. Non si commetterà dunque l'errore di 0,0002.

PROBLEMA.

272. **D**ato il raggio AB d'una sfera; trovare il lato di un cubo eguale prossimamente in solidità alla medesima.

Soluzione. Col raggio AB , centro A descritta la circonferenza $BGCDPEd$; si faccia ad $AB = BC = CD = DE = Ed$. Col centro B , raggio BD si segui l'arco $aDNd$. Collo stesso raggio, e col centro E si tagli quest'arco in a . Si faccia ad $AB = aG = dN$. Quindi $aCN = CP$. Sarà PG il lato cercato.

Dimostrazione. Poichè sarà (§. 271.) CN corda di $91^{\circ} 26' \frac{24}{100}$. Sarà poi $GC = 15^{\circ}$ (§. 32.). Quindi $PG = 107^{\circ} 26' \frac{24}{100}$, del quale arco la corda si trova essere eguale a 1,6112696, supponendo $AB = 1$. Ora nella stessa supposizione, e supposto il rapporto della circonferenza al diametro $= \pi$; si ha la solidità della sfera $= \frac{4}{3} \pi$, e il suo logaritmo $= 1.4 + 1.\pi - 1.3 = 0.6210886$, il di cui terzo 0,2073628 si trova essere logaritmo di 1,611991. Laonde l'errore, che si commette, non arriva a 0,0003.

PROBLEMA.

273. **D**ato il lato AB di un cubo; trovare il raggio d'una sfera, che gli sia
 105. prossimamente eguale in solidità.

Soluzione. Col raggio AB , centro A si descriva la circonferenza $BI, CMFDE$. Si faccia ad $AB = BC = CD = DE$. Quindi $\alpha BD = B\alpha = E\alpha$; quindi ad $A\alpha = BF$; quindi ad $F\alpha = FM$, ad $FA = FL$. Sarà LM il raggio cercato.

Dimostrazione. Sarà l'arco $FL = 60^\circ$ (15. lib. 4.). Si ha poi (posto $AB = 1$) $\alpha F = A\alpha = AF = \sqrt{2} \approx 1$ (6. 27.) $= 0,4142136$, che si trova essere corda di $23^\circ 54' \frac{276}{1000}$. Sarà dunque l'arco $LM = 36^\circ 5' \frac{1793}{1000}$, il quale ha per corda $0,6195986$. Ora essendo, come è noto, la solidità d'una sfera di raggio R espressa dalla formola $\frac{4}{3}\pi R^3$, l'atto $\frac{4}{3}\pi R^3 = 1$, che è la solidità del dato cubo, si avrà $\log. R = \frac{\log. 3 - \log. 4 - \log. \pi}{3}$
 $= -1 + ,7916371 = \log. 0,6203504$. L'errore dunque, che si commette per difetto, non arriva a $0,0008$.

274. Tutte queste approssimazioni nella rettificazione,

rificazione, quadratura, e cubatura della circonferenza, del cerchio, e della sfera, e nei Problemi inversi, non lasciando errori di una millesima di raggio, si stimano essere sufficienti per la pratica. Chi ne volesse di più avanzate, non avrà a far altro, che trovare col calcolo di quale arco in gradi, e minuti sia corda quella quantità lineare, che cerca; quindi ricavare questa corda dal cerchio dopo d'averlo diviso in quei gradi, e minuti, che occorrono, adoperando i metodi dimostrati quì sopra (§. 235. 243.).

PROBLEMA.

275. **D**uplicare il cubo per approssimazione.

Soluzione I. Sia AB il lato del cubo, Fig. che si vuol duplicare. Col centro A , 107. e col raggio AB descritta la circonferenza $BQMNCFPDEdc$, e fatto in essa ad $AB = BC = CD = DE$; quindi a $BD = Ba = Ea$; quindi ad $Aa = BF$; quindi ad $FA = FN$; sarà aN prossimamente il lato del cubo doppio.

Dimostrazione. Sarà l'arco BN una duodecina della circonferenza (p. 31.) $\equiv 30^\circ$. Se s'introduce quest'arco $BN \equiv A$ nell'equazione (1); l'arco A' , del quale è corda la aN , risulterà $\equiv 78^\circ 2' \frac{291}{1000}$. Si ha dunque (posto $AB \equiv 1$) $aN \equiv 2 \text{ sen. } 39^\circ 1' \frac{145}{1000} \equiv 1,2592800$. Si ha poi $\sqrt{2} \equiv 1,2599209$. Non si commette dunque un difetto di 0,0007.

Soluzione II. Se si volesse un'esattezza maggiore; fatta la costruzione della Soluzione I., e fatto inoltre ad $AB \equiv Ed \equiv dc$; quindi ad $Aa \equiv Bf \equiv Db \equiv db$; quindi ad $aN \equiv cM \equiv MP$; quindi ad $Fb \equiv FQ$; sarà PQ il lato cercato con molto maggiore approssimazione.

Dimostrazione. Essendo per la Dimostrazione della Soluzione I. l'arco $cM \equiv 78^\circ 2' \frac{291}{1000} \equiv MP$; sarà l'arco $cMP \equiv 146^\circ 5' \frac{581}{1000}$. Sottratto poi l'arco $FQ \equiv 72^\circ$ (p. 40.) dall'arco $Fbc \equiv 150^\circ$ (p. 27. 29.); resterà l'arco $cQ \equiv 78^\circ$, il quale sottratto dall'arco cMP lascerà l'arco $QP \equiv 78^\circ 5' \frac{180}{1000}$; la corda del quale si trova essere $\equiv 1,2599190$. Non si commetterà dunque, se non un difetto di 0,0000019, cioè di due milionesime di raggio appena.

276. **T**riplicare, quadruplicare ec. il cubo Fig. 108. fino alla ottuplicazione.

Soluzione. Sia AB il lato del cubo dato. Col raggio AB , e col centro A si descriva la circonferenza $B\omega G\mu C, FLDOEdc$. Si faccia in essa ad $AB = BC = CD = DE = Ed = dc$. Collo stesso raggio AB , e coi centri B, c, d, E, D si descrivano gli archi $A\pi c, Aq d, c\beta A\delta E, A\rho d, A\tau E$. Col raggio BD , centro B si descriva l'arco $d\tau\delta Da$; collo stesso raggio, e col centro E si tagli quest' arco in a . Collo stesso raggio, e coi centri $C, e D$ si descrivano gli archi $c\rho q E, B\beta\pi d$. Si faccia ad $Aa = BF$; quindi ad $AB = FO = aG = GL$; quindi ad $EL = a\omega$; quindi $a\pi\tau = B\epsilon$; quindi $a\rho\delta = B\mu$; $aqr = \mu\tau$. Si avrà

aO	lato del cubo	duplo (§. 275.)
$C\delta$		triplo
OG		quadruplo
$O\omega$		quintuplo
$c\epsilon$		sestuplo
$c\tau$		settuplo
BE		ottuplo

Dimostrazione. Posto $AB = 1$; si avrà (§. 271.) $C^{\Delta} = \sqrt{4 - \frac{1}{13}\sqrt{33}}$ $\approx 1,4440033$. Si ha poi $\sqrt[13]{3} \approx 1,4422493$. L'eccesso dunque non arriva a 0,002.

Essendo l'arco $OFG = 105^{\circ}$ (§. 29. 30.), sarà la sua corda $OG = 2 \text{ sen. } 52^{\circ} 30' = 1,5867066$. Si ha poi $\sqrt[13]{4} \approx 1,5874007$. Il difetto dunque è di 0,0007 circa.

Sarà poi l'arco $EL = \frac{1}{3}$ della circonferenza (§. 31.) $= 75^{\circ}$. Se nell'equazione (4) s'introduce $A' = 75^{\circ}$; risulta l'arco $A = B\omega = 32^{\circ} 27' \frac{11}{1000}$. Sarà dunque $F\omega = 57^{\circ} 32' \frac{11}{1000}$. Quindi essendo $FO = 60^{\circ}$ (15. lib. 4.), sarà l'arco $OF\omega = 117^{\circ} 32' \frac{11}{1000}$, che ha per corda 1,7102744. Si ha poi $\sqrt[13]{5} \approx 1,7099757$. L'eccesso dunque non arriva a 0,0003.

Essendo $BD = B\tau = D\pi = \sqrt{3}$, e $D\tau = B\pi = 1$; sarà (§. 23.) $\pi\tau \cdot BD = (BD)^2 - (B\pi)^2$; cioè $\pi\tau \cdot \sqrt{3} = 2$; quindi $\pi\tau = \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{1} = 1,1547005$, che si trova essere corda di $70^{\circ} 31' \frac{11}{1000} = B\epsilon$. Sarà dunque l'arco $\epsilon B\tau = 130^{\circ} 31' \frac{11}{1000}$, il quale ha per corda 1,8164964. Si ha poi $\sqrt[13]{6} \approx 1,8171204$. Si commette dunque un difetto minore di 0,0007.

I due triangoli $C^{\Delta}p$, Bp^{Δ} avendo i lati

rispettivamente eguali, saranno eguali (8, e 26. lib. 1.); ed essendo sulla stessa base p^d , saranno tra le stesse parallele p^d , BC (39. lib. 1.). Sarà dunque l'angolo $CB^d \equiv B^d p$ (27. lib. 1.). Dunque $\cos. CB^d \equiv \frac{1}{2} \sqrt{11}$ (§. 271.) $\equiv \cos. B^d p$. Si ha poi dalla Trigonometria $(Bp)^2 = (B^d)^2 + (p^d)^2 - 2 B^d \cdot p^d \cdot \cos. B^d p$; ed essendo $Bp = C^d$, poichè si determina colla stessa costruzione; si avrà $4 = \frac{1}{2} \sqrt{33} \equiv 3 + (p^d)^2 - 2 p^d \cdot \frac{1}{2} \sqrt{11}$; quindi $1 - \frac{1}{2} \sqrt{33} \equiv (p^d)^2 - p^d \cdot \frac{1}{2} \sqrt{33}$. Aggiungendo da una parte, e dall'altra dell'equazione il quadrato di $\frac{1}{2} \sqrt{33}$; risulterà $(1 - \frac{1}{2} \sqrt{33})^2 \equiv (p^d - \frac{1}{2} \sqrt{33})^2$; quindi $p^d - \frac{1}{2} \sqrt{33} \equiv \pm (1 - \frac{1}{2} \sqrt{33})$. Si ha poi (§. 23.) $p^d \cdot dE \equiv (dE)^2 - (pd)^2$; cioè $p^d \equiv 1 - (pd)^2$; e quindi minore dell'unità; quindi si determinerà $p^d \equiv \frac{1}{2} \sqrt{33} - 1 \equiv 0,9148541$, che si trova essere corda di $54^\circ 26' \frac{1001}{1111}$. Si ha poi $qr \equiv LM$ della Fig. 103. \equiv alla corda dell'arco $31^\circ 28' \frac{1113}{1719}$ (§. 269.). Dunque l'arco $cB\mu' \equiv 60^\circ + 54^\circ 26' \frac{1001}{1111} + 31^\circ 28' \frac{1113}{1719} \equiv 145^\circ 55' \frac{1001}{1111}$; del quale arco si trova essere la corda $c' \equiv 1,9122214$. Si ha poi $\sqrt{7} \equiv 1,9129309$. Si commette dunque un difetto minore di $0,000701$.

Si ha poi $BE \equiv 1 \equiv \sqrt{8}$.

Dunque ec.

PROBLEMA.

277. **S**udduplicare il cubo prossimamente.

Soluzione. Sia AB il lato del cubo da Fig. 108. Si descriva col centro A , raggio AB la circonferenza $BCDEd$, e si faccia ad $AB = BC = CD = DE = Ed$; quindi col raggio BD , centro B si segni l'arco DAd . Col centro d , raggio dA si segni l'arco AAE . Sarà DA il lato cercato.

Dimostrazione. La DA di questa Figura è determinata come la dL della Fig. 103. Sarà dunque (§. 269.) $DA = 0,7912869$.

Ora si ha $\sqrt[3]{\frac{1}{2}} = 0,7937039$. Si commettere dunque un difetto minore di $0,002$.

278. Non abbiamo voluto omettere le Soluzioni di questi due ultimi Problemi (§. 276. 277.), benchè alcuni risultati contengano errore di una, o due millesime, e gli altri di qualche diecimillesima; perchè in molti casi tali errori riusciranno trascurabili, e d'altra parte le Soluzioni ci sono sembrate semplici. Si potrebbero avere valori

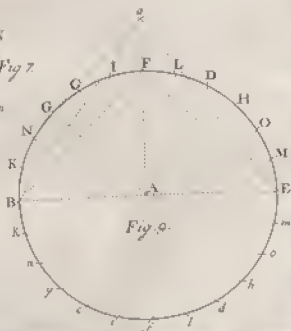
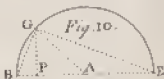
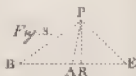
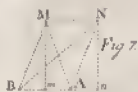
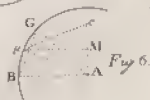
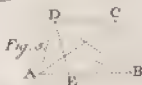
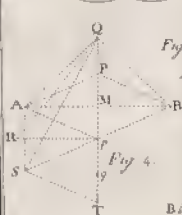
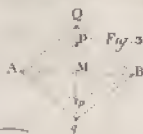
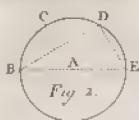
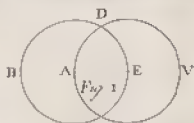
molto più esatti, qualora facesse d'uopo non solo per formare cubi nei rapporti espressi qui sopra, ma anche in altri, se si cercasse di qual arco espresso in gradi, minuti, e parti di minuti sieno corde le radici cubiche, o la metà, terzi ec. delle radici cubiche richieste alla costruzione del cubo cercato, e si ricavassero poi queste corde dal cerchio diviso appunto in gradi minuti ec. (§. 243. 244. ec.), e s'impiegassero poi quelle corde, o i loro multipli (§. 64. 65.) alla stessa costruzione del cubo.

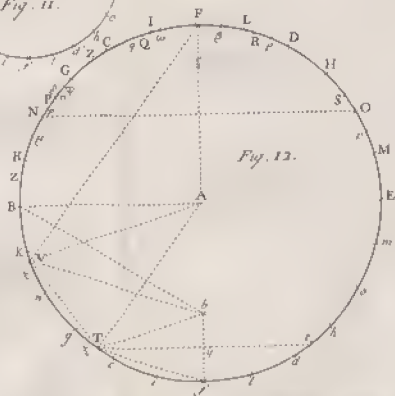
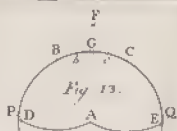
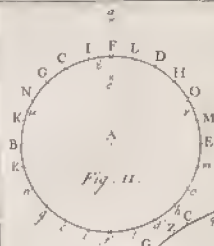
279. E qui sia fine ormai a questa Geometria del Compasso, che se non dispiacerà ai Geometri, e se potrà in qualche modo servire agli Artifici, ai Disegnatori, e specialmente ai Divisori de' cerchj per gli usi Geografici ed Astronomici; io mi troverò della lunga noja divorata nel comporla abbastanza ricompensato.

F I N E.

INDICE DEI LIBRI DI QUESTA GEOMETRIA.

LIB. I.	P reliminare	pag. 1
II.	Della divisione della circonferenza, e degli archi del cerchio	14
III.	Della moltiplicazione, e divisione delle distanze in linea retta	36
IV.	Dell'addizione, e sottrazione delle distanze; della situazione delle perpendicolari, e delle parallele	52
V.	Delle distanze proporzionali	64
VI.	Delle radici	73
VII.	Della intersezione delle rette cogli archi di cerchio, e tra loro	92
VIII.	Della costruzione, e moltiplicazione, e divisione degli angoli; e delle linee trigonometriche	97
IX.	Delle Figure simili, e dei poligoni regolari	108
X.	Dei centri	136
XI.	Problemi vari	145
XII.	Problemi per approssimazione	204





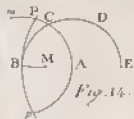


Fig. 14.

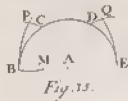


Fig. 15.



Fig. 16.



Fig. 17.



Fig. 18.



Fig. 19.

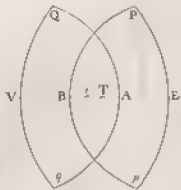


Fig. 20.



Fig. 21.

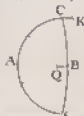


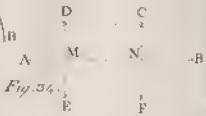
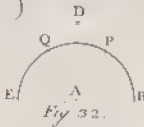
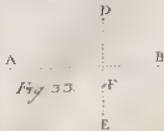
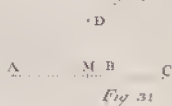
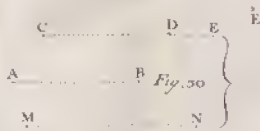
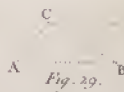
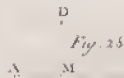
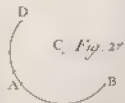
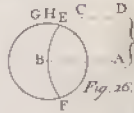
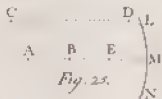
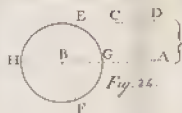
Fig. 22.

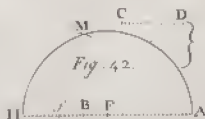
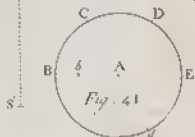
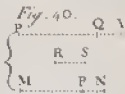
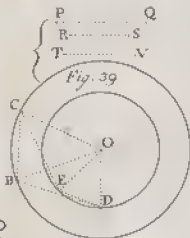
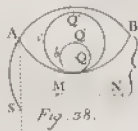
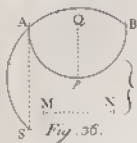
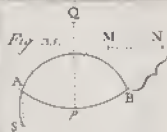


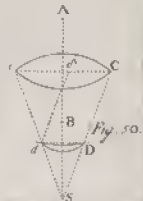
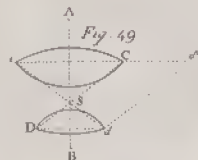
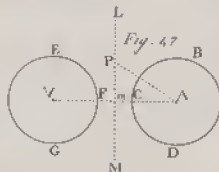
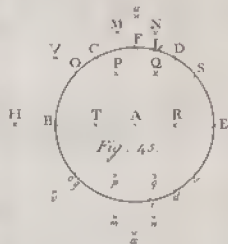
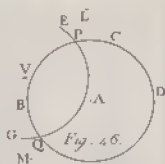
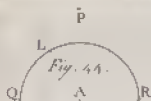
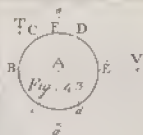
Fig. 23.

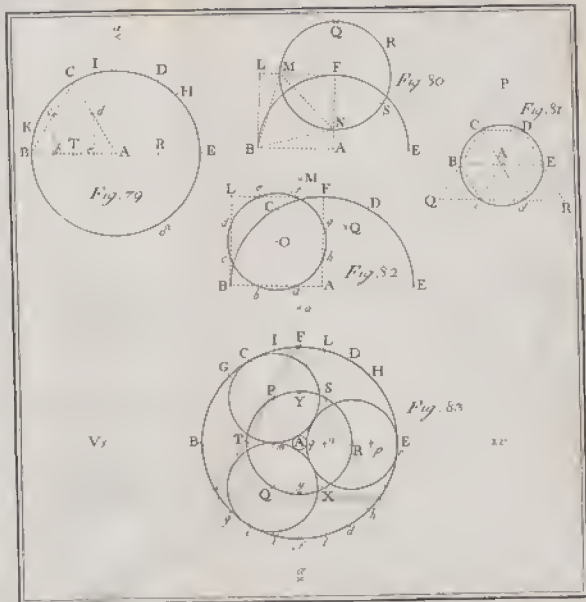
H G F E A





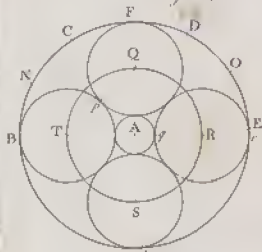






P

Fig. 54.



P

Fig. 55.

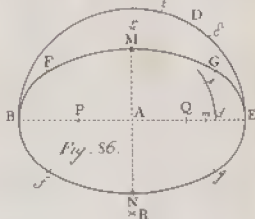
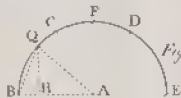
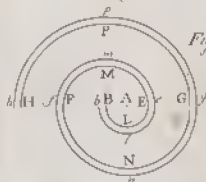


Fig. 56.

P

Fig. 57.



P

Fig. 58.

